اصول جبر و مقابله

جلد دویم

برای تست دوم مدارس متوسط

(سال چهارم و پنجم و ششم)

تالیف

میرزا رضا خان مهندس الملک معلم و ممتحن کل ریاضیات

مدرسه مبارکه دارالفنون

چاپ اول

طهران

حق طبع و تقلید محفوظ

۱۳۳۴

در مطبعه مرکزی طبع رسید

نام کتاب جبر و مقابله
تاریخ تسلیم دفتر
شماره عمومی ۵۴۹۴
شماره مخصوص

کتابخانه مسجد اعظم
شماره ثبت: ۸۵
شماره کتاب: ۹۰۳
تاریخ ثبت: ۷۸/۸/۲۶
شماره مسلسل:

جبر و مقابله مقدماتی

جلد دوم

برای قسمت دوم مدارس متوسطه

(سال چهارم و پنجم و ششم)

تألیف

میرزا رضاخان مهندس الملک معلم ریاضیات عالی
مدرسه دار الفنون و ممتحن مدارس متوسطه و غیره

طهران

حق طبع و تقلید و تحریف محفوظ

۱۳۳۴

دیباچه

بسم الله الرحمن الرحیم

بعد الحمد والصلوة — این بنده حقیر رضا قریب بهجده سال است در مدرسه مبارکه دار الفنون بسمت معلمی علوم ریاضی اشتغال دارد (ورود بمدرسه در سال ۱۳۰۵ و فراغت از تحصیلات در سال ۱۳۱۵ و انتصاب بمعلمی علوم ریاضی بفرمان رسمی در سال ۱۳۱۶)

مکرر شعب مختلفه ریاضی را تدریس کرده و در هر شعبه که درس گفته کتابی بفراخور قوه محصلین طبقات مختلفه تألیف و تدوین کرده و بمرور ایام بواسطه تجارب در عمل تدریس و بمقتضای وقت اسلوب و سبک جدیدی اختیار نموده تا این اواخر که دوره ابتدائی و متوسطه مدارس عموماً و مدرسه دار الفنون خصوصاً در تحت پروگرام مدارس فرنگ مرتب و مقرر گردید برای تسهیل و تعمیم وسایل تحصیل علوم شریفه در صدد برآمد که کتب مؤلفه خود را پس از تصرفات لازمه و درج بعضی نکات و دقایق عمده که از معلمین و مهندسین اروپائی دار الفنون که این بنده بمعاونت ایشان را داشت اقتباس نموده مطابق پروگرام رسمی وزارت جلیله علوم و معارف باسلوب پسندیده که امروز در تمام مدارس عالم معمول است

مندرجاً بحلیه طبع درآورد — اسامی کتب مؤلفه از این قرار است

دوره ابتدائی

حساب درسه دوره — هندسه در دو دوره طبع شده — رسم هندسی درسه دوره

دوره متوسطه

حساب استدلالی در تحت طبع است — هندسه در دو جلد طبع شده — جبر و مقابله دوره اول — جبر و مقابله دوره دوم در دو جلد طبع شده — مثلثات مستقیمة الخطوط طبع شده — هندسه و سکریپ تو علم تسطیح و تصویر مرتبه دار — هیئت جدید در رسم هندسی درسه دوره .

دوره عالی

جبر و مقابله تا آخر دیفرانسیل و انتگرال در دو جلد — هندسه تحلیلی و مخروطات — هیئت عالی — مثلثات کروی — تیگرافی و نقشه برداری و تسویه — رسم تفتیشات جغرافیائی — ژئودزی .

طبع کتب دوره عالی که تاکنون دو مرتبه مختصراً تدریس شده منوط بکثرت داوطلبان ریاضیات عالی و ایجاد و تأسیس دار المعلمین و طبقه مهندسی است

دانش آموز با مساعدت وزارت جلیلهٔ معارف اتمام طبع دورهٔ ابتدائیه و متوسطه را که بیشتر محل حاجت است مقدم داشت بعون الله الملک الوهاب

هو الله تعالی

چون جناب آقا میرزا رضاخان مهندس الملک معلم و مفتش کل ریاضیات مدارس دار الفنون از بدو فراغت از تحصیلات تاکنون قریب بیجده سال است در مدرسهٔ مبارکهٔ دار الفنون در شعب مختلفهٔ علوم ریاضی درس گفته اند و اغلب از شاگردان ایشان امروز در مدارس دولتی و غیره مشغول تدریس هستند و علاوه بر این مشار الیه در تألیف و تدوین کتب کلاسیکی شعب مختلفهٔ ریاضیات مطابق پروگرام رسمی وزارت معارف که امروز در تمام مدارس ایران معمول است رنج برده و زحمت فوق العاده کشیده اند لذا وزارت جلیلهٔ معارف قدر زحمات و خدمات معزی الیه را منظور نظر داشته تدریس کتب مؤلفهٔ ایشان را در مدارس ابتدائیه و متوسطه تصویب و تصدیق مینماید

جبر مقدماتی

فهرست مندرجات جلد دوم

مقالهٔ سوم — معادلات درجهٔ دوم

		صفحات
فصل سیزدهم — معادلات یک مجهولی درجهٔ دوم		
۱ — حل معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم	۱	(۲۵۱)
۲ — روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها	۱۴	(۲۶۴)
۳ — علامت ریشه‌ها	۱۵	(۲۶۵)
۴ — حالتیکه ضریب x^2 صفر باشد	۲۴	(۲۷۴)
امثله	۳۴	(۲۸۳)
فصل چهاردهم — خواص سه جمله درجهٔ دوم		
۱ — تجزیهٔ سه جمله درجهٔ دوم بعوامل درجهٔ اول	۴۱	(۲۹۱)
۲ — علامت سه جمله درجهٔ دوم	۴۷	(۲۹۷)
۳ — نامساویهای درجهٔ دوم	۵۷	(۳۰۷)
۴ — تغییرات سه جمله درجهٔ دوم و نمایش هندسی آن	۶۴	(۳۱۴)
امثله	۷۸	(۳۲۸)
فصل پانزدهم معادلات قابل تبدیل بدرجهٔ دوم		

		صفحات
۱ـ معادلات دو مجذوری	۸۳	(۳۳۳)
۲ـ تبدیل $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ (۸۸)		(۳۳۸)
۳ـ تجزیهٔ جملهٔ دو مجذوری بعوامل درجهٔ دوم	۹۳	(۳۴۳)
۴ـ تغییرات ترجملهٔ دو مجذوری و نمایش هندسی آن	۹۵	(۳۴۵)
۵ـ معادلات معکوس	۱۰۳	(۳۵۳)
۶ـ معادلات دو جملهٔ دوستهٔ جوا مخصوص	۱۱۰	(۳۶۰)
۷ـ معادلات دهم	۱۱۶	(۳۶۶)
امثله	۱۱۹	(۳۷۹)
فصل شانزدهم ـ دستگاه معادلات چند مجهولی درجهٔ دوم		
۱ـ حل دستگاه مرکب از یک معادلهٔ درجهٔ دوم و یک یا چند معادلهٔ درجهٔ اول	۱۲۱	(۳۸۱)
۲ـ حل دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم	۱۲۷	(۳۸۷)
۳ـ شرط اینکه دو معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم دارای یک ریشهٔ مشترک باشند	۱۳۱	(۳۹۱)
۴ـ حل دستگاه معادلات مخصوص	۱۳۴	(۳۹۴)
امثله	۱۴۰	(۴۰۰)
فصل هفدهم ـ ماکزیموم و مینیموم	۱۴۳	(۴۰۳)

		صفحات
تمیز و نمایش معرفات	۱۷۵	(۴۲۰)
امثله	۱۹۰	(۴۳۵)
فصل هیجدهم ـ مسائل درجهٔ دوم	۱۹۷	(۴۴۷)
مقالهٔ چهارم تصاعدات و لگاریتم		
فصل نوزدهم ـ تصاعدات		
۱ـ تصاعد حسابی	۲۰۹	(۴۲۹)
۲ـ تصاعد هندسی	۲۱۲	(۴۶۲)
امثله	۲۳۰	(۴۸۰)
فصل بیستم ـ لگاریتم ها		
۱ـ تعریف و خواص لگاریتم ها	۲۳۲	(۴۸۲)
۲ـ لگاریتم های عمومی یا اعشاری	۲۴۸	(۴۹۸)
۳ـ جداول لگاریتم های ۵ رقم اعشار	۲۵۲	(۵۰۲)
۴ـ جداول لگاریتم های ۷ رقم اعشار	۲۶۱	(۵۱۱)
۵ـ اعمال در لگاریتم ها	۲۶۹	(۵۱۹)
مسائل و امثله	۲۷۴	(۵۲۴)

فصل بیست و یکم ـ مرابع مرکب و قطاعین و استهلاک دین

۱ـ مرابع مرکب و مسئلهٔ عددیه ۲۷۹ (۵۲۹)

۲ـ قطاعین و مسئلهٔ عددیه ۲۹۱ (۵۴۱)

۳ـ استهلاک دین و مسئلهٔ عددیه

مقالهٔ پنجم ـ مشتقات و تغییرات معرفات

فصل بیست و دوم ـ مشتقات

۱ـ حدود ۳۰۹ (۵۵۹)

۲ـ اتصالات معرفات ۳۲۷ (۵۷۷)

۳ـ مشتقات معرفات بسیطه ۳۳۱ (۵۸۱)

۴ـ مشتقات معرفات مندرجه ۳۴۲ (۵۹۲)

۵ـ مشتق معرف معرفات ۳۴۶ (۵۹۶)

فصل بیست و سوم ـ استعمال مشتقات در تغییر معرفات

۱ـ تغییر هندسی مشتق (۶۰۷) (۳۵۷)

۲ـ تغییر معرفات بسیطه و معرفات مندرجه (۶۲۵)-(۶۰۹)
۳۷۵-۳۵۹

۳ـ معرفات اولیه و مشتق مساحت سطحی (۶۳۳)-(۶۲۵)
۳۸۳-۳۷۵

مقاله سوم

معادلات درجهٔ دوم

فصل سیزدهم

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

۱ـ حل معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

۳۰۰ـ صورت کلی معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم آنستکه هرگاه جمیع جمل آن نسبت به x صحیح و منطق باشند جملهٔ که شامل بزرگترین نماینده x است از درجهٔ دوم باشد

هر معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم را میتوان پس از نقل جمیع جمل آن بطرف اول و اختصار جمل متشابه باین صورت کلی ذیل در آورد

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

چنین معادلهٔ کلیه شامل سه قسم جمله است جملهٔ درجهٔ دوم ax^2 و جملهٔ درجهٔ اول bx و جملهٔ معلوم c که بترتیب پس از اختصار جمل متشابه درجهٔ دوم و درجهٔ اول و جمل معلومه صورت گرفته باشند

ضرایب a و b و c مقادیر معلومه اند که میتوانند مثبت باشند یا منفی و یک جمله باشند یا کثیر الجمله و علاوه بر این ممکنست b و c صفر باشند و اما a را همواره مخالف صفر فرض میکنیم زیرا که اگر a صفر باشد معادله از درجه دوم نخواهد بود و منجر شود بدرجه اول و وقتیکه b و c مخالف صفر باشند معادله را کامل گویند و اگر یکی از این دو ضریب یا هر دو یکمرتبه صفر باشند معادله را ناقص نامند و معادله یکی از این سه صورت ذیل در آید

$$ax^2=0 \quad , \quad ax^2+bx=0 \quad , \quad ax^2+c=0$$

حل کردن معادله درجه دوم عبارتست از یافتن مقادیر مثبته یا منفیه که چون بجای x در معادله قرار دهیم صدق کنند یعنی مقدار سه جمله درجه دوم ax^2+bx+c را صفر کنند و چنین مقادیر را ریشه های معادله نامند

مثلاً هرگاه در معادله درجه دوم $3x^2-14x+8=0$ بجای x مقدر جا عدد 4 و $\frac{2}{3}$ را قرار دهیم مقدار سه جمله صفر میشود پس این دو عدد ریشه های معادله میباشند

۳۰۱ — **حل معادله ناقص درجه دوم** — اولاً فرض میکنیم $b=0$ یعنی جمله درجه اول مفقود باشد و معادله باین صورت در آید $ax^2+c=0$ و چون جمله معلوم c را بطرف ثانی نقل کنیم و طرفین را بر a که مخالف صفر است قسمت کنیم حاصل میشود $x^2=\frac{-c}{a}$ و محض اختصار چنین قرار میدهیم $A=\frac{-c}{a}$ پس $x^2=A$ و حال اگر فرض کنیم A مثبت باشد همواره میتوان عدد مثبت صحیح یا اصمی یافت که مجذورش مساوی A باشد و چنین عدد عبارتست از جذر حسابی و آنرا باین صورت مینامیم $\sqrt{A}$ و واضح است که $\sqrt{A}$ یک ریشه معادله است و اما چون ملاحظه کنیم که مجذور $-\sqrt{A}$ نیز A است چنانچه بجای x در معادله قرار دهیم صدق کند پس معادله مفروضه دو ریشه حقیقی و مختلفة العلامه قبول کند $x=+\sqrt{A}$ و $x=-\sqrt{A}$ ولکن بحسب معاهده عادت براین جاری شده که هر دو ریشه را متحداً در یک دستور قرار داده چنین نویسند $x=\pm\sqrt{A}=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ و علاوه بر این معادله مفروضه نتواند اجوبه دیگر قبول کند زیرا که مجذور هر عدد مثبت

یا منفی دیگر مخالف A خواهد بود

و هرگاه A منفی باشد معادله مفروضه هیچ ریشه قبول نکند زیرا که مجذور هر عدد غیر شخصی مثبت یا منفی همواره مثبت است و نتواند هرگز مساوی عدد منفی A گردد و در اینحالت ریشه‌های معادله را موهومی مینامند

و باید خوب متفت شد که هرگاه ضریب a و c مختلف العلامه باشند معادله دارای دو ریشه خواهد بود و اگر a و c متحد العلامه باشند معادله هیچ ریشه قبول نکند مثلاً فرض میکنیم این معادله را

$\frac{x}{x+2}=\frac{9x-18}{5x}$ و پس از اختصار چنین میشود $3x^2-36=0$

یا $x^2=9$ و از اینجا $x=\pm 3$ و یا چون دو ریشه را به x' و x'' بنامیم $x'=+3$ و $x''=-3$ پس معادله مفروضه فقط دو ریشه $+3$ و -3 قبول کند

ثانیاً فرض میکنیم $c=0$ یعنی جمله معلوم مفقود باشد پس معادله کلی منجر شود باین صورت $ax^2+bx=0$

یا $x(ax+b)=0$

و چون شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب دو عامل صفر باشد آنستکه یکی از آنها دو عامل صفر باشد

بنابراین میتوان معادله مفروضه را بر دو معادله درجه اول تجزیه کرده چنین قرار داد $x=0$ و $ax+b=0$ و در اینصورت باز معادله دارای دو ریشه خواهد بود $x'=0$ و $x''=-\frac{b}{a}$ مثلاً فرض میکنیم این معادله را $(x-1)(x-2)=2$ و پس از اختصار چنین میشود $x^2-3x=0$ یا $x(x-3)=0$ و از آنجا $x'=0$ و $x''=3$

ثالثاً هرگاه b و c هر دو یکمرتبه صفر باشند معادله کلی منجر شود باین صورت $ax^2=0$ و هر دو ریشه صفر میگردد

۳۰۲ — حل معادله کلی

حال فرض میکنیم معادله کلی درجه دوم ذیل را $ax^2+bx+c=0$ و چون a مخالف صفر است معادله را در $4a$ ضرب میکنیم حاصل میشود

$4a^2x^2+4abx+4ac=0$ ، $4ac$ را نقل میکنیم بطرف ثانی چنین میشود $4a^2x^2+4abx=-4ac$ و چون ملاحظه کنیم که دو جمله طرف اول معادله یعنی $4a^2x^2+4abx$ عبارتست از دو جمله

اول مجذور $(2ax+b)$ زیرا که

$$(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$$

پس برای اینکه طرف اول معادله را مجذور کامل نمائیم بر دو طرف این معادله مقدار b^2 را میفزائیم چنین حاصل میشود

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

یا

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

و این معادله معادل است با معادله مفروضه چون در این معادله جدید طرف اول مجذور کامل است پس بحسب علامت b^2-4ac ممکن است سه حالت اتفاق افتد

اولاً فرض میکنیم $b^2-4ac>0$ در اینحالت معادله دارای دو ریشه متمایزه خواهد بود زیرا که چون از طرفین معادله جذر استخراج کنیم چنین میشود

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

و از آنجا

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2)$$

و چون دو ریشه را از یکدیگر جدا نموده به x' و x'' بنمائیم چنین میشود

$$\begin{cases} x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases} \qquad (3)$$

هرچند ممکن است رشته اعمال لازمه در ضرایب را برای حساب کردن ریشه‌ها در این دستور به بیان متعارفی درآورد ولکن بهتر آنست که این دستور را بخاطر سپرده عمل کرد هرگاه ضریب b عدد زوج باشد میتوان دستور کلی را مختصر نمود پس اگر قرار دهیم $b=2b'$ دستور (۲) چنین میشود

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

و یا چون دو جزء کسر را بر ۲ قسمت کنیم چنین حاصل می‌شود

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \qquad (4)$$

ثانیاً فرض میکنیم $b^2-4ac=0$ در اینحالت معادله $(2ax+b)^2=b^2-4ac$ که معادلست با معادله مفروضه باین صورت درآید $(2ax+b)^2=0$ پس برای اینکه طرف اول این معادله صفر گردد لازم و کافیست که چنین باشد $2ax+b=0$ و از آنجا $x=-\frac{b}{2a}$ پس وقتیکه $b^2-4ac=0$ معادله درجه دوم فقط دارای

یک ریشه است ولکن باز در این حالت مخصوص گویند معادله دارای دو ریشه مضاعف یا دو ریشه متساویه است زیرا که فرض میکنیم مقدار b^2-4ac مثبت و بسیار کوچک باشد پس دو ریشه غیر متساویه که از دستور $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ بدست میآیند اختلافشان با $\frac{-b}{2a}$ مقدار جزئی $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ است یکی اضافی و دیگری نقصانی ولکن چون b^2-4ac متدرجاً میل کند بسمت صفر $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ نیز متمایل شود بسمت صفر و دو ریشه مذکوره نزدیک شوند به $\frac{-b}{2a}$ و بالاخره در حدود قضیه که b^2-4ac رسد بصفر این دو ریشه نیز برسند به $\frac{-b}{2a}$ و بهم متساوی میگردند

ثالثاً فرض میکنیم $b^2-4ac<0$ در اینحالت معادله $b^2-4ac=(2ax+b)^2$ که معادلست با معادله مفروضه محال خواهد بود زیرا که طرف ثانی این معادله عدد منفی است و طرف اول آن مجذور کامل است چون مجذور هر عدد غیر مشخص مثبت یا منفی بوده مثبت است پس هر مقداریکه بجای x قرار دهیم طرف اول معادله مثبت خواهد بود و مساوی طرف ثانی که عدد منفی است نمیگردد بنابراین معادله هیچ

ریشه قبول نکند ولکن محض تعمیم دستورات بحسب معادله که عقریب مذکور خواهد شد گویند که معادله دارای دو ریشه موهومی است

پس از آنچه مقدم شد می بینیم که مقدار b^2-4ac در اصول معادلات درجه دوم دارای عمل اصلی مهمی است چنانکه جنس ریشه های ax^2+bx+c تابع علامت b^2-4ac است و این مقدار مهم را **دیسکریمینان** نامند (discriminant) بنابراین قبل از حل معادله درجه دوم چون دیسکریمینان را تشکیل دهیم علامت آن جنس ریشه ها را معلوم مینماید پس خلاصه نتایج مذکوره فوق چنین میشود

اولاً $b^2-4ac>0$ دو ریشه معادله حقیقی و مختلفه اند

ثانیاً $b^2-4ac=0$ دو ریشه معادله حقیقی و متساویند

ثالثاً $b^2-4ac<0$ معادله ریشه ندارد یا اینکه گوئیم ریشه های معادله موهومی باشند

۳۰۳ - تبصره - وقتیکه ضرب a و c مختلف العلامه باشند حاصل ضرب ac منفی است و b^2-4ac بالضروره مثبت است پس در این صورت ریشه های معادله حقیقی و مختلفه باشند

مثال ۱ - فرض میکنیم این معادله را $5x^2-17x-12=0$ چون $b^2-4ac=17^2+4\times5\times12=529$ مثبت است پس معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز خواهد بود

$$x=\frac{17\pm\sqrt{17^2+4\times5\times12}}{10}=\frac{17\pm\sqrt{529}}{10}=\frac{17\pm23}{10}$$

$$x'=\frac{17-23}{10}=\frac{3}{2}\ ,\ x''=\frac{17+23}{10}=4$$

مثال ۲ — این معادله را حل کنید $3x^2-14x+8=0$ چون b زوج است پس این معادله از روی دستور (۴) حل میشود

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-3\times8}}{3}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{3}=\frac{7\pm5}{3}$$

و از آنجا $x''=\frac{7+5}{3}=4$ و $x'=\frac{7-5}{3}=\frac{2}{3}$

مثال ۳ - حل کنید این معادله را $9x^2-30x+25=0$ چون دیسکریمینان ($b^2-4ac=30^2-4\times9\times25=0$) مساوی صفر است پس معادله دارای یک ریشه مضاعف است $x=\frac{30}{18}=\frac{5}{3}$

مثال ۴ - حل کنید این معادله را $7x^2+3x+5=0$ چون دیسکریمینان ($b^2-4ac=3^2-140=-131$) منفی است پس معادله ریشه ندارد

۲۰۴ — اغلب معادله درجه دوم را باین صورت درآورند

$$x^2+px+q=0$$

برای تبدیل معادله کلی $ax^2+bx+c=0$ بصورت فوق کافیست دو طرفش را بر a قسمت کنیم تا حاصل شود $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ و بعد چنین قرار دهیم $p=\frac{b}{a}$ و $q=\frac{c}{a}$ و چون از فورمول

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

بجای $\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ مقادیرشان p و q را قرار دهیم این فورمول نتیجه شود $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ پس ریشه‌های معادله $x^2+px+q=0$ از روی همین فورمول بدست آیند و ریشه‌های این معادله ممکن است مختلف یا متساوی یا موهومی باشند بحسب آنکه $\frac{p^2}{4}-q$ مثبت یا صفر یا منفی باشد

۲۰۵ — **مقادیر موهومی** — مقدار موهومی آنست که شامل جذر عدد منفی باشد مانند $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-a^2}$ و $17+3\sqrt{-10}$ و ابداً نباید تصور مقدار حقیقی نباشد بلکه فقط بمنزله رمز مخصوصی است که برای وسیله تعمیم دستورات در جبر داخل شده است و در اصول معادلات درجات عالیه دارای عمل مهمی است و از روی معادلات مقرره جمیع

قواعد محاسبه مربوط در مقادیر حقیقی را در مقادیر موهومی نیز استعمال
کنند مخصوصاً جذر $\sqrt{A}$ را همواره مساوی A فرض میکنیم اگرچه A
منفی باشد مثلاً $(\sqrt{-5})^2=-5$ و ما در اینجا داخل در بحث مقادیر
موهومی نمیشویم و فقط اکتفا کنیم بذکر اینکه بوسیله این معادلات
چگونه میتوان ریشه های موهومی درجه دوم را تبدیل نمود بصورت دیگر
که جزء $\sqrt{-1}$ شامل رادیکال موهومی دیگر نباشد

در حل معادله درجه دوم چنانچه دیده شد در صورتیکه $b^2-4ac<0$
معادله ریشه ندارد یعنی هیچ عدد مثبت یا منفی یا صفر نمی توان یافت
که چون بجای x قرار دهیم در معادله صدق نماید پس مقادیریکه از
دستور $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ بدست آیند موهومی باشند
بنابراین چون b^2-4ac منفی است پس $4ac-b^2$ مثبت باشد
فرض میکنیم $m=\sqrt{4ac-b^2}$ پس $4ac-b^2=m^2$ و بعد
$b^2-4ac=-m^2=m^2\times(-1)$ پس فورمول درجه دوم چنین میشود
$x=\frac{-b\pm\sqrt{m^2\times(-1)}}{2a}=\frac{-b\pm m\sqrt{-1}}{2a}$
بمحض اختصار کتابت چنین قرار میدهیم $x=-\frac{b}{2a}$

$\frac{m}{2a}=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\beta$ پس فورمول سابق باینصورت درآید
$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ ولکن اغلب چنین قرار دهند $i=\sqrt{-1}$
بنابراین فورمول کلی ریشه های موهومی درجه دوم باین صورت خواهد
بود $\alpha\pm\beta i$ و این فورمول مرکبست از یک جزء حقیقی α و از یک
جزء موهومی که حاصل ضرب i باشد در عامل حقیقی β مثلاً فرض میکنیم
این معادله را $2x^2-6x+17=0$ از دستور (۲) چنین بدست
میآید $x=\frac{3\pm\sqrt{9-34}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-25}}{2}$ و چون
$\sqrt{-25}=5\sqrt{-1}=5i$ پس $x=\frac{3}{2}\pm i\frac{5}{2}$
دو عبارت موهومی $\alpha+i\beta$ و $\alpha-i\beta$ را مزدوج یکدیگر گویند پس
دو ریشه موهومی درجه دوم همواره مزدوج باشند و علاوه براین مجموع
دو مقدار موهومی مزدوج حقیقی است زیرا که $\alpha+i\beta+\alpha-i\beta=2\alpha$
و همچنین حاصل ضرب دو مقدار مزدوج نیز حقیقی باشد زیرا که
$(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=\alpha^2-i^2\beta^2$ و چون بحسب معاده $i^2=-1$
پس $(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=\alpha^2+\beta^2$
است مرد ابدا باین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم

۲۰۶ - قضیه - حاصل جمع دو ریشه معادله درجه دوم مساویست با $\frac{-b}{a}$ یعنی خارج قسمت ضریب جمله درجه اول x با علامت مخالف بر ضریب جمله درجه دوم x^2 و حاصل ضرب دو ریشه مساویست با $\frac{c}{a}$ یعنی خارج قسمت جمله معلوم بر ضریب جمله درجه دوم

چون دو ریشه معادله را x' و x'' فرض کنیم چنین خواهیم داشت

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

این دو تساوی را عضو به عضو با یکدیگر جمع میکنیم حاصل میشود

$$x'+x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

و چون همین دو تساوی را عضو به عضو در یکدیگر ضرب کنیم و ملاحظه کنیم که حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضلشان مساویست با تفاضل مجذورات دو عدد پس چنین خواهیم داشت

$$x' \times x'' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a \times 2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

۲۰۷ - هرگاه معادله درجه دوم بصورت ذیل باشد $x^2+px+q=0$

روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها چنین میشود $x'+x''=-p$ و $x'x''=q$

۲۰۸ - **علامات ریشه‌های معادله درجه دوم** - از روی قضیه مذکوره فوق میتوان علامات ریشه‌های درجه دوم را بدون حل معادله بیک نظر بدست آورد مشروط براینکه بدانیم مطمئن باشیم که ریشه‌های معادله حقیقی هستند

هرگاه $\frac{c}{a}$ یعنی حاصل ضرب دو ریشه مثبت باشد این دو ریشه یک علامتند و هر دو بعلامت حاصل جمشان $\frac{-b}{a}$ باشند و اگر $\frac{c}{a}$ منفی باشد دو ریشه مختلف العلامه اند و حاصل جمشان $\frac{-b}{a}$ بعلامت آنکه بحسب مقدار مطلق بزرگتر باشد و اگر $\frac{c}{a}$ صفر باشد یکی از ریشه‌ها صفر و دیگری مساویست با $\frac{-b}{a}$ و ما خلاصه نتایج مذکوره را در جدول ذیل درج میکنیم

$b^2-4ac>0$ ، $\frac{c}{a}>0$ ، $\frac{-b}{a}>0$: دو ریشه مثبت است

$b^2-4ac>0$ ، $\frac{c}{a}>0$ ، $\frac{-b}{a}<0$: دو ریشه منفی است

$b^2-4ac>0$ ، $\frac{c}{a}<0$: دو ریشه مختلف العلامه اند و آنکه بحسب مقدار مطلق بزرگتر باشد بعلامت $\frac{-b}{a}$ است

$b^2-4ac>0$ ، $\frac{c}{a}=0$: یک ریشه صفر و یک ریشه مساویست با $\frac{-b}{a}$

۱) ریشه مضاعف با $-\frac{b}{2a}$ و علامت $b^2-4ac=0$

معادله ریشه ندارد $b^2-4ac<0$

مثال- فرض میکنیم چهار معادله ذیل را

(۱) $3x^2+16x+5=0$ (۲) $3x^2+16x+5=0$

(۳) $3x^2-16x-5=0$ (۴) $3x^2+16x-5=0$

ریشه های این معادلات همیشه حقیقی هستند چونکه در دو معادله اول $b^2-4ac=8^2-3\times5$ مثبت است و در دو معادله دیگر جمله آخر c یعنی ۵ منفی است و اما ریشه های معادله (۱) مثبتند چونکه حاصل ضربشان $\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{5}{3}$ مثبت است پس دو ریشه متحد العلامه اند و حاصل جمعشان $-\frac{b}{a}$ یعنی $-\frac{16}{3}$ نیز مثبت است ولکن در معادله (۲) ریشه ها منفی باشند چونکه حاصل ضربشان $\frac{5}{3}$ مثبت است پس متحد العلامه اند و حاصل جمعشان $-\frac{16}{3}$ منفی است و در معادله (۳) و (۴) یک ریشه مثبت است و دیگر ریشه منفی چونکه حاصل ضربشان $-\frac{5}{3}$ منفی است و اما در معادله (۳) حاصل جمع دو ریشه $\frac{16}{3}$ است پس آنکه بحسب مقدار مطلق بزرگتر باشد مثبت است ولکن در معادله چهارم ریشه بحسب مقدار مطلق بزرگتر منفی است چونکه مجموع دو ریشه $-\frac{16}{3}$ یعنی منفی است

۲۰۹- **مسئله-** دو عدد معلوم کنید که مجموعشان s باشد و حاصل ضربشان p از روی روابط مابین ضرایب و ریشه ها مستقیماً معلوم میشود که دو عدد مطلوب ریشه های معادله درجه دوم ذیل هستند $x^2-sx+p=0$ (۱) یعنی مجموع دو ریشه s و حاصل ضربشان p است در صورتیکه فرض کنیم $s^2-4p>0$ و علاوه بر این بسهولت میتوان ثابت کرد که فقط ریشه های این معادله در مسئله فوق صدق میکنند زیرا که فرض میکنیم x و y دو عدد مطلوب باشند پس این دو معادله صورت می بندد $x+y=s$ و $xy=p$ ولکن این دو معادله معادلند با دو معادله ذیل $x-s=y$ و $x^2-sx+p=0$ پس x یعنی یکی از دو عدد مطلوب مساوی یکی از دو ریشه معادله (۱) خواهد بود و عدد دیگر y بالضروره مساوی $s-x$ یعنی ریشه دیگر این معادله چونکه مجموع دو ریشه معادله (۱) مساویست با s

مثال- دو عدد معلوم کنید که مجموعشان ۱۳ و حاصل ضربشان ۴۰ باشد این دو عدد ریشه های معادله ذیل هستند $x^2-13x+40=0$ و چون این معادله را حل کنیم دو ریشه چنین میشود

$x=\frac{13\pm\sqrt{169-4\times 6}}{2}=\frac{13\pm 3}{2}$ و از آنجا $x'=8$ و $x''=5$

۳۰۰- **تبدیلات معادله درجه دوم** - مسئله میخواهیم معادله درجه دوم تشکیل دهیم که ریشه‌هایش مساوی باشند با ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$

معادله مفروضه ذیل با انضمام عدد h

فرض میکنیم x' و x'' ریشه‌های معادله (۱) باشند پس ریشه‌های معادله مطلوب چنین میشوند $x'+h$ و $x''+h$ و مجموعشان چنین میشود

$$x'+x''+2h=-\frac{b}{a}+2h$$

و حاصل ضربشان

$$(x'+h)(x''+h)=x'x''+h(x'+x'')+h^2=\frac{c}{a}-\frac{hb}{a}+h^2$$

پس معادله درجه دوم مطلوب باین صورت درآید

$$ax^2+(b-2ah)x+ah^2-bh+c=0 \quad (2)$$

و باید دانست که عدد h را میتوان چنان اختیار نمود که صورت معادله

(۱) بسیار ساده باشد مثلاً اگر فرض کنیم $h=\frac{b}{2a}$ آنوقت معادله

(۲) شامل جمله x نخواهد بود و باین صورت درآید $ax^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$

و یا $x^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ پس اگر $b^2-4ac>0$ معادله

دارای دو ریشه خواهد بود $x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و چون از ریشه‌های

این معادله مقدار h یعنی $-\frac{b}{2a}$ را نقصان کنیم ریشه‌های معادله (۱) بدست آیند

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

۳۱۱- **تبصره** - از روی همین قاعده مذکوره میتوان معادله درجه دوم تشکیل داد که ریشه‌هایش kx' و kx'' باشند (k عدد مفروضی است) و یا $\frac{1}{x'}$ و $\frac{1}{x''}$ و چنین معادلات را عموماً تبدیلات معادله مفروضه بر $x+h$ و kx و $\frac{1}{x}$ گویند و بطور کلی هر معادله را تبدیل معادله مفروضه با $f(x)$ گوییم (x حرف معلومی است از x) در صورتیکه ریشه‌هایش مقادیر عددیه $f(x')$ و $f(x'')$ باشند یعنی مقادیر معرف $f(x)$ حاصل کند وقتیکه بجای x در آن معرف مقادیر x' و x'' ریشه‌های معادله مفروضه را قرار دهیم

و علاوه بر این میتوان تبدیلات بر $x+h$ و kx و $\frac{1}{x}$ را بطریق سهل مستقیماً بدست آورد مثلاً فرض میکنیم x' ریشه معادله تبدیل بر $x+h$ باشد پس ریشه معادله (۱) چنین میشود $x'-h$ و از آنجا این معادله تشکیل میگردد $a(x-h)^2+b(x-h)+c=0$

و این معادله مطلوب بعینه همان معادله (۲) است که سابق تشکیل دادیم

و همچنین هرگاه x یک ریشه از معادله تبدیل بر kx باشد پس $\frac{x}{k}$ یک ریشه از معادله (۱) خواهد بود و آنوقت این معادله صورت بعد

$$a\frac{x^2}{k^2}+b\frac{x}{k}+c=0 \text{ و یا } ax^2+bkx+ck^2=0$$

این معادله تبدیلی مطلوب باشد و همچنین معادله تبدیل بر $\frac{1}{x}$ نیز باین صورت ذیل خواهد بود $a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\frac{1}{x}+c=0$

و یا $cx^2+bx+a=0$ و ریشه‌های این معادله عکس ریشه‌های معادله (۱) میباشند

۲۱۲ — حاصل جمع قوای متشابه ریشه‌ها

میگیریم x' و x'' ریشه‌های معادله ذیل باشند $ax^2+bx+c=0$ میخواهیم مجموعات $x'^2+x''^2$ و $x'^3+x''^3$ و ..... و $x'^n+x''^n$ را حساب کنیم این مجموعات را به S_2 و S_3 و ..... و S_n میدهیم

و چون x' و x'' ریشه‌های معادله (۱) هستند پس این دو تساوی ذیل حاصل میشود $ax'^2+bx'+c=0$ (۲) $ax''^2+bx''+c=0$ (۳)

و چون این دو تساوی را عضو بعضو بیفزائیم چنین میشود

$$a(x'^2+x''^2)+b(x'+x'')+2c=0$$

و یا چون فرض کنیم $x'+x''$ چنین حاصل میشود $a S_2+bS_1+2c=0$

و چون مقدار S_1 مساویست با $-\frac{b}{a}$ پس دستور مجموع مجذورات دو ریشه چنین میشود $S_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}=-\frac{bS_1+2c}{a}$ و حال اگر دو طرف تساوی (۲) را در x' ضرب کنیم و همچنین دو طرف تساوی (۳) را در x'' و دو حاصل را عضو بعضو جمع کنیم چنین حاصل میشود

$$a(x'^3+x''^3)+b(x'^2+x''^2)+c(x'+x'')=0$$

یا $aS_3+bS_2+cS_1=0$ و لکن چون مقدار S_2 و S_1 معلومست پس دستور S_3 چنین میشود $S_3=-\frac{bS_2+cS_1}{a}=\frac{3abc-b^3}{a^2}$

و بطور کلی دو طرف تساوی (۲) را در x'^{n-2} ضرب میکنیم و دو طرف تساوی (۳) را در x''^{n-2} و دو حاصل را عضو به عضو جمع کنیم چنین حاصل میشود

$$a(x'^n+x''^n)+b(x'^{n-1}+x''^{n-1})+c(x'^{n-2}+x''^{n-2})=0$$

یا

$$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0 \quad (۴)$$

و از روی این فورمول ظاهر است که هرگاه S_{n-1} و S_{n-2} در دست باشند S_n معلوم میگردد یعنی $S_n=-\frac{bS_{n-1}+cS_{n-2}}{a}$ زیرا که اگر S_2 و S_3 در دست باشد و $n=3$ پس S_3 معلوم میگردد و اگر S_3 و S_4 معلوم باشد و $n=4$

پس S_4 بدست میآید و بهمین ترتیب بنابراین هرگاه مقدار n را متدرجاً ۳، ۴، ۵، ....
فرض کنیم، از روی فورمول (۲) میتوان متدرجاً مقادیر S_3 و S_4 و S_5 ..
را معلوم نمود در صورتیکه S_1 و S_2 در دست باشند

و هرگاه معادله درجه دوم بصورت بسیط ذیل باشد $x^2+px+q=0$
در این صورت فورمول (۲) چنین میشود $S_n=-pS_{n-1}-qS_{n-2}$ و دستور آن
و تیه نیز چنین خواهد بود $S_1=-p$ و $S_2=p^2-2q$ و $S_3=-p^3+3pq$
و جمیع این مجموعات کسری از جمله های صحیحی هستند بحسب p و q

۳۱۳ — مجموعات قوای صحیحه و منفیه ریشه های معادله درجه دوم را نیز
میتوان بسهولت حساب نمود زیرا که چون تساوی محقق ذیل را قرار دهیم
$S_{-n}=x_1^{-n}+x_2^{-n}=\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}=\left(\frac{1}{x_1}\right)^n+\left(\frac{1}{x_2}\right)^n$ می بینیم که این مجموعات
عبارتند از مجموعات قوای مشابه معادله که ریشه هایش $\frac{1}{x_1}$ و $\frac{1}{x_2}$ باشند یعنی
عکس ریشه های معادله مفروضه (۱) و ما سابقاً دیدیم که چنین معادله بصورت
ذیل خواهد بود $cx^2+bx+a=0$ پس باید بطریق حالت اول عمل نمود و از
روی فورمولات سابقه چنین حاصل میشود $cS_{-2}+bS_{-1}+2a=0$
صورتیکه $S_{-1}=\frac{-b}{c}$ و بطور کلی $cS_{-n}+bS_{-(n-1)}+aS_{-(n-2)}=0$

پس از روی این فورمول کلی میتوان متدرجاً مجموعات S_3 و S_4 و S_5 و
را معلوم نمود مثلاً مجموعات اولیه چنین خواهند بود $S_1=\frac{-b}{c}$
$S_2=\frac{b^2-2ac}{c^2}$ و $S_3=\frac{3abc-b^3}{c^3}$ و $S_4=$ و بهمین ترتیب

علاوه بر این باید متذکر بود که میتوان تساوی ذیل را حاصل نمود
$S_{-n}=\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}=\frac{x_1^n+x_2^n}{x_1^n\cdot x_2^n}=\frac{S_n}{\left(\frac{c}{a}\right)^n}=\frac{a^n}{c^n}S_n$
و از اینجا ظاهر است که هرگاه S_n معلوم باشد میتوان مقدار S_{-n} را مستقیماً بدست آورد

مثال ۱ — مقدار اکسیر سیمون ذیل را حساب کنید
$A=x_1^3+x_2^3+3x_1^2x_2^2+3x_1^2x_2^2$ در صورتیکه x_1 و x_2 ریشه های
این معادله باشند $ax^2+bx+c=0$ — تساوی فوق را چنین میتوان
نوشت $A=x_1^3+x_2^3+3x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2)$
و از آنجا $A=\frac{3abc-b^3}{a^3}+3\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{b^2-2ac}{a^2}$

مثال ۲ — تبدیل معادله $x^2+px+q=0$ را بحسب x^2 تشکیل دهید
هرگاه x_1 و x_2 ریشه های معادله مفروض باشند ریشه های معادله مطلوب
چنین میشوند x_1^2 و x_2^2 و مجموع آنها چنین خواهد شد $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$
و حاصل ضربشان میشود $(x_1x_2)^2=q^2$ بنابراین معادله مطلوب

باینصورت خواهد بود $x^2-(3pq-p^3)x+q^3=0$

۳ — حالتیکه ضریب a صفر باشد

۳۱۴ — در حل معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ (۱)

تاکنون a را مخالف صفر فرض کردیم و اگر a صفر باشد معادله منجر شود

بدرجه اول $bx+c=0$ و فقط یک ریشه $x=-\frac{c}{b}$ قبول کند

$(b\neq 0)$ ولکن برای ارتباط این حالت مخصوص با حالت کلی فرض میکنیم

a اندا مخالف صفر و اما بی‌نهایت کوچک باشد و تحقیق میکنیم که هرگاه

b ثابت باشند و a میل کند بسمت صفر ریشه‌های معادله چگونه تغییر میکنند

بنابراین معادله تشکیل میدهیم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله (۱) باشند

فرض میکنیم y عکس ریشه x از معادله (۱) باشد یعنی $y=\frac{1}{x}$ پس $x=\frac{1}{y}$

و چون x در معادله (۱) صدق میکند پس y نیز در معادله مطلوب ذیل

صدق خواهد نمود $a\frac{1}{y^2}+b\frac{1}{y}+c=0$ یا $cy^2+by+a=0$ (۲) پس ریشه‌های این

معادله (۱) باشند و حال اگر a میل کند بسمت صفر معادله (۲) باینصورت

درآید $by+cy^2=0$ و دو ریشه این معادله چنین میشود $y'=0$

$y''=-\frac{b}{c}$ و بنابفرض ریشه‌های معادله (۱) عکس y' و y'' میگردد

و بنابرین وقتیکه a میل کند بسمت صفر یکی از ریشه‌های معادله از حد

صفر میشود یعنی الی غیرالنهایه میگردد $x'=\frac{1}{y'}=\frac{1}{0}$ و دیگری عکس y'' یعنی

$x''=-\frac{c}{b}$ پس از اینجا معلوم شد که هرگاه در معادله درجه دوم (۱) ضریب

a اتفاقاً صفر گردد یکی از ریشه‌های این معادله بی‌نهایت متزاید میگردد

و معدوم میشود و دیگری میرسد بمقدار معین $-\frac{c}{b}$

۳۱۵ — ممکن است اتفاق افتد که ضریب a و b هر دو دیگر بسمت میل

کنند بسمت صفر در اینحالت معادله (۲) منجر شود باین صورت $cy^2=0$

و آنوقت دو ریشه این معادله صفر میشود و بنابراین دو ریشه معادله (۱)

الی غیرالنهایه میگردد

۳۱۶ — تحقیق ریشه‌های معادله (۱) وقتیکه a میل کند بسمت صفر از روی

فورمول ذیل نیز بسیار سهل است $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

یا $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ابتدا فرض میکنیم b مثبت باشد پس وقتیکه a میل کند بسمت صفر رادیکال

$\sqrt{b^2-4ac}$ منجر شود به $\sqrt{b^2}=|b|=b$ و آنوقت صورت x''

میل کند به $-2b$ و مخرجش میرسد بصفر و بصورت $\frac{-2b}{0}$ نموده شود پس مقدار

مطلق x' از هر حدی تجاوز کند والی غیرالنهایه میگردد و اما صورت و مخرج x' با ازاء $a=0$ میرسند بصفر و مقدار x' بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ نموده شود

این رفع ابهام بسیار سهل است زیرا که صورت و مخرج x' را در مقدار $(-b-\sqrt{b^2-4ac})$ که مزدوج صورت باشد ضرب میکنیم و چنین حاصل میشود $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$

و چون از صورت و مخرج کسر $=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$ عامل مشترک $2a$ را که در ضمن رسیدن بصفر سبب ابهام کسر میگردد حذف کنیم چنین میشود $x'=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$ و حال اگر a میل کند بسمت صفر مخرج این کسر میل میکند بـ $-2b$ و مقدار واقعی x' در حد چنین میشود $x'=\frac{-2c}{2b}=-\frac{c}{b}$ و اگر فرض کنیم b منفی باشد در اینحال $\sqrt{b^2-4ac}$ منجر شود بـ $\sqrt{(-b)^2}=|-b|$ و چون a میل کند بسمت صفر در این حالت ریشه x' الی غیرالنهایه میگردد و ریشه x' بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید و پس از رفع ابهام چنین میشود $x'=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$ و بعد باز ازاء $a=0$ مقدار واقعی x' چنین میشود $x'=-\frac{c}{b}$

۳۱۷ — هرگاه اتفاقاً a و b هر دو یک مرتبه صفر باشند مقدار x' و x'' از روی فورمول های $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ هر دو بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ نموده شوند

و پس از رفع ابهام بطریق سابق و حذف عامل مشترک $2a$ از دو طرف کسر دو ریشه باین صورت درآید $x'=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$ و $x''=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$ و حال اگر a و b میل کنند بسمت صفر و c مخالف صفر باشد دو مقدار x' و x'' در حدی غیرالنهایه میگردند و معدوم میشوند

۳۱۸ — محاسبه ریشه ها در حالیکه ضریب a کوچک باشد.

وقتیکه ضریب a خیلی کوچک باشد یکی از ریشه ها بحسب مقدار مطلق بی نهایت بزرگ و دیگری نزدیک شود به $-\frac{c}{b}$ ولیکن از روی فورمولهای کلی $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ مقادیر تقریبی ریشه ها خیلی بزحمت بدست میآیند چونکه غالباً b^2-4ac مجذور کامل نیست در این صورت باید مقدار $\sqrt{b^2-4ac}$ را بتقریب استخراج نمود و آنوقت خطائیکه در محاسبه تقریبی x' و x'' حاصل شده چون بر $2a$ قسمت شود بی نهایت زیاد میگردد مثلاً اگر چنانچه a مساوی $\frac{1}{1000}$ باشد وقتیکه مقدار تقریبی $\sqrt{b^2-4ac}$ را

بر $2a$ قسمت کنیم خطائیکه از $\sqrt{b^2-4ac}$ حاصل شده در مقدار x با قدر مرتبه بزرگ میشود پس برای اینکه مقدار x را تا هر حد اعشاری معینی که خواسته باشیم مثلاً تا $\frac{1}{10^{20}}$ تقریب استخراج کنیم باید ابتدا مقدار $\sqrt{b^2-4ac}$ را تا کمتر از $\frac{1}{10^{20}} \times \frac{1}{500}$ تقریب حساب نمود و هرقدر که a کوچکتر باشد خطا زیادتر میشود و ما در ذیل مقدار یکی از ریشه‌ها را بتقریب مشخصی با عانت قاعدهٔ معروف بقاعدهٔ تقریبات متوالیه بسرعت حساب میکنیم و چون یکی از ریشه‌ها بدست آید آن را از مجموع دو ریشه بنی از $-\frac{b}{a}$ نقصان میکنیم تا ریشه دیگر نیز معلوم گردد و a را نسبت به b خیلی کوچک فرض میکنیم و ابتدا مقدار تقریبی ریشه کوچکتر را بدست میآوریم

قاعده تقریبات متوالیه — اصل قاعده تقریبات متوالیه از این قرار است معادلهٔ کلی $ax^2+bx+c=0$ را باین صورت مینویسیم $x=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x^2$ (1) و چون بفرض a یا $\frac{a}{b}$ بقدر کفایت کوچک است پس مقدار جمله $-\frac{a}{b}x^2$ خیلی کوچک میشود و در تقریب اول میتوان از این جمله صرف نظر نمود بنا

براین مقدار $-\frac{c}{b}$ را اول مقدار تقریبی x اختیار میکنیم و چنین مینویسیم $x_1=-\frac{c}{b}$ و بعد اگر در طرف ثانی معادله (1) بجای x مقدار x_1 را قرار دهیم دوم مقدار تقریبی بدست میآید $x_2=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_1^2$ و همچنین باز در طرف ثانی معادله (1) بجای x مقدار x_2 را قرار میدهیم تا سوم مقدار تقریبی x حاصل شود $x_3=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_2^2$ و بنابهمین طریق میتوان این عمل چندین مرتبه تکرار نمود و بطور کلی n ام مقدار تقریبی x را بدست آورد $x_n=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_{n-1}^2$ این بود اصل قاعدهٔ تقریبات متوالیه و حال می پردازیم به تفصیل محاسبهٔ مقادیر تقریبی ریشه مطلوب از این قرار اول مقدار تقریبی x اینست $x_1=-\frac{c}{b}$ و دوم مقدار تقریبی آن چنین میشود $x_2=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$ و بعد سوم مقدار تقریبی آن را حساب میکنیم حاصل میشود $x_3=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_2^2=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}\right)^2=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}-\frac{a^3c^4}{b^7}$ و چون نسبت جملهٔ آخر بجملهٔ ماقبلش مساویست با $\frac{ac}{2b^2}$ و این عددیست خیلی کوچک اگر چنانچه a خیلی کوچک باشد پس میتوان در محاسبهٔ سوم مقدار تقریبی از جملهٔ آخر قطع نظر نموده و چنین

نوشت

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}$$

و حال چون این مقدار را در طرف ثانی معادله (۱) قرار دهیم چهارم مقدار تقریبی بدست میآید

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}\right)^2$$

و چون اعمال لازمه را بجا آوریم و از جمیع جملهٔ شامل قوای بالاتر قوه سوم a باشند صرف نظر کنیم چهارم مقدار تقریبی چنین میشود

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7}$$

و چون بهمین طریق عمل کنیم مقدار جا چنین بدست میآید

$$x_5 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7} - 14\frac{a^4c^5}{b^9}$$

$$x_6 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7} - 14\frac{a^4c^5}{b^9} - 42\frac{a^5c^6}{b^{11}}$$

و بهمین طور چون این مقادیر x_3 و x_4 و x_5 و ..... را ملاحظه کنیم می‌بینیم که مقادیر صعودی هستند که مقدار جا نزدیک شوند بریشه مطلوب x و هر کدام از آنها مساویست با مقدار ماقبلش با انضمام یک جمله تصحیح و مقادیر این جمل تصحیح که میافزائیم مقدار جا کوچکتر میشوند چونکه شامل عوامل قوای صعودی a میباشند و چون عدهٔ جمل تصحیح را بقدر کفایت اختیار کنیم مقدار ریشه مطلوب را بهر تقریبی که خواسته باشیم بدست میآید و علاوه بر این

هرگاه در مقدار x_n توقف کنیم خطائیکه از اختیار x_n بجای x حاصل شده به α_n بنمائیم ثابت میکنیم که $\alpha_n \times \left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{b}$ و چون دو ریشه معادله حقیقی هستند پس $\frac{4ac}{b^2}$ کوچکتر میشود از واحد و بنابراین میتوان n را آنقدر بزرگتر اختیار نمود تا خطای α_n کوچکتر باشد از هر مقداری که بخواهیم و قاعده تقریبات متوالیه قابل اجرا نیست مگر وقتیکه $\frac{4ac}{b^2}$ کوچکتر از واحد باشد یعنی ریشه‌های معادله حقیقی باشند و اما هر قدر مقدار $\frac{4ac}{b^2}$ از واحد خیلی کوچکتر باشد مقادیر تقریبی x_2 و x_3 و x_4 و ..... بسرعت نزدیک شوند بمقدار مطلوب x

مثال ۱ — ریشه‌های معادله ذیل را تا ده رقم اعشار حساب کنید

$$0{,}0000048x^2 - 19x + 1 = 0$$

چون $a = 0{,}0000048$ و $b = -19$ و $c = 1$

پس $-\frac{a}{b} = \frac{0{,}0000048}{19} < 0{,}0000003$ و $-\frac{c}{b} = \frac{1}{19}$

و از آنجا چنین نتیجه میشود $\frac{1}{19} < \frac{1}{391} \times 0{,}0000003 < \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(-\frac{a}{b}\right)$

$$-\frac{ac^2}{b^3} = -\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2 < \frac{1}{9859} \times 0{,}000000000000018 < \frac{1}{10^{12}}$$

$$-\frac{2a^2c^3}{b^5} = -2\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^3$$

و از جمله سوم تصحیح و همچنین از جمل بعد شش میتوان صرف نظر نمود و کافیست که

مجموع $-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$ را تا ده رقم اعشار صحیح حساب کرد

$$-\frac{c}{b}=\frac{1}{19}=0{,}0526315789\text{۵}$$

$$-\frac{ac^2}{b^3}=\frac{0{,}0000048}{19^3}=0{,}0000000000700$$

پس $x'=0{,}0526315859$ تقریب $\frac{1}{10^{10}}$

$$x''=-\frac{b}{a}-x'=39583333333333333-$$

تا ده رقم اعشار $-0{,}0526315859=39583333280\overset{17474}{7}0$

مثال ۲- حل کنید این معادله را $3x^2-740x+400=0$ چون $\frac{4800}{5836900}=\frac{4ac}{b^2}$ کمتر است از $\frac{1}{10^2}$ پس قاعده تقریبات متوالیه قابل اجراست و چون بطریق مثال فوق حل و بحث کنیم مقدار x' تا کمتر از $\frac{1}{10^9}$ تقریب نقصانی استخراج میشود $x'=0{,}0523570970$ و بعد $x''=2546{,}6143095699$

مثال ۳- حل کنید این معادله را $5x^2+140x-7=0$ در ریشه تا کمتر از نیم واحد تقریب از مرتبه ششم اعشار چنین میشود

$$x'=0{,}049911 \quad \text{و} \quad x''=-28{,}049911$$

امثله متعلقه بفصل سیزدهم

۱- حل کنید معادلات ناقصه ذیل را

$$7x^2-4375=0 \quad \text{و} \quad -5x^2+140x=0$$

$$3(x-3)(x-4)+21(x-1)-7=155$$

$$(x-7)(x-15)(x-2)=(x-1)(x+21)(x+10)$$

معادلات ذیل بصورت معادلات ناقصه درآورده حل کنید

$$a^2x^2+2abx+b^2-c=0$$

$$(a^2-kc^2)x^2+2(ab-kc\alpha)x+b^2-k\alpha^2=0$$

$$p^2x^2+(2q+b)px+q(q+b)=0$$

۲- معادلات ذیل را حل کنید

$$x^2-15x+56=0 \quad \text{و} \quad 12x^2+17x+6=0$$

$$15x^2-19x-10=0 \quad \text{و} \quad x^2-16x+63=0$$

$$4x^2-3x+7=x^2-2x+1 \quad \text{و} \quad (x-1)(x-2)=6$$

$$(5x-3)^2-7=44x+5 \quad \text{و} \quad x^2-879x+8513=0$$

$$(x-2)(x-3)+(x-3)(x-4)=(x-4)(x-5)$$

$$x^3(x-1)(x-2)+x^2(x+1)(x+2)-2(x^3+x^2+x+1)=0$$

$$(x-\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{3})+(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{4})=(x-\tfrac{1}{4})(x-\tfrac{1}{5})$$

$$\frac{x}{2}+(x-1)(x-2)=2(x+1)(x+2)-35$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=2x-\frac{5}{6}$$

$$x-1+(x-2)(x-3)=6x(x+1)-70$$

$$(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$$

$$(ax-b)(bx-a)=c^2,\ (x-a)^3(x-b)=x^3-a^3$$

$$(2a^2+b^2)(x^2-x+1)=(2b^2+a^2)(x^2+x+1)$$

$$(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$$

$$3x^2-x-\sqrt{2}=0,\ 3x^2-(2\sqrt{3}+2)x+2\sqrt{2}=0$$

$$x^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0,\ 4x^2-2R(\sqrt{5}+1)x+R^2\sqrt{5}=0$$

۳ــ علامات و جنس ریشه‌های معادلات زیر را بدون حل آنها بنظر تعیین کنید.

$$7x^2-16x+9=0\ ,\ 7x^2+16x-9=0$$

$$7x^2+16x+9=0\ ,\ 7x^2-16x-9=0$$

$$5x^2-12x+8=0\ ,\ 5x^2+12x-8=0$$

$$x^2-100x+6=0\ ,\ 2x-3x+1=0$$

$$(x-1)(x-3)+(x+1)(x+2)=6$$

۴ــ معادلات کسری ذیل را حل کنید

$$\frac{x}{15}+\frac{45}{3(10-x)}=\frac{3(10+x)}{95},\ \frac{x-6}{x-12}=\frac{x-12}{x-6}+\frac{5}{6}$$

$$\frac{x+7}{x^2-7x}-\frac{x-7}{x^2+7x}=\frac{7}{x^2-73},\ \frac{7x+10}{x-2}=\frac{5x}{12}+\frac{35}{6}$$

$$\frac{1}{3x^2-27}+\frac{3}{4}-\frac{1}{x-3}=1\ ,\ x-\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=2$$

$$\frac{3}{4x^2-3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{x^2-1}-\frac{4}{7},\ \frac{2x+3}{x+4}=\frac{2x+4}{5x-3}$$

$$\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0,\ \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{3}{x}+\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=4\frac{1}{12},\ \frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}+2=0$$

$$\frac{3x-4}{x+1}=x^2+2x-\frac{7}{x+1}\ ,\ \frac{x+2}{x-4}+\frac{x+3}{x-2}+5=0$$

$$\frac{x-3}{x+4}+\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-1}{x+1}=3,\ \frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{3x+2}{2x-1}+\frac{7-x}{2x+1}=\frac{7x-1}{4x^2-1}+5,\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}=\frac{x-2}{x-3}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{x-1}+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3}{2}\ \frac{x^2+2}{3x-2}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\ ,\ \frac{x-a}{b}-1=\frac{b+x}{x}$$

$$\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x},\quad x+\frac{1}{x}=a$$

$$a+b+x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x},\ \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0,\quad \frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$$

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{b+x}{b-x}-\frac{b-x}{b+x}$$

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)}+\frac{a}{(a-b)(a-x)}+\frac{b}{(b-x)(b-a)}=0$$

$$\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^2+(x-b)^2}=a-b,$$

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$$

$$\frac{x-b}{x-a}+\frac{x-a}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

$$\frac{a-b+x}{a+b+x}+\frac{a+b}{x+b}=2$$

$$\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=2\,\frac{a+b+c}{x+b+c}$$

$$\frac{3x-2b}{x-b}-\frac{4x+2b}{x+a}=\frac{a-b}{a+b}$$

۵ــ معادلاتی تشکیل دهید که ریشه‌های ذیل باشند

-1 و $\frac{2}{7}$ ، $-\frac{2}{3}$ و $-\frac{3}{4}$ ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ ، 1 و $\frac{1}{7}$

$-\sqrt{2}$ و $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{R\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{R}{2}$ ، $3-2\sqrt{5}$ و $3+2\sqrt{5}$

$\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$ و $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ ، $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، 4 و -5

$1-i$ و $1+i$ ، $2-3i$ و $2+3i$ ، $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ و $\frac{a-b}{a^2-b^2}$

۶ــ در جنس و علامات ریشه‌های معادلات ذیل بحث مقدماتی کنید

$$x^2-2(\lambda+1)x+\lambda^2=0 \quad و \quad x^2-(5\lambda+2)x+1=0$$

$$x^2-2x+\lambda-4=0 \quad و \quad \lambda x^2-3x+5=0$$

$$x^2-6x+\lambda-3=0 \quad و \quad \lambda x^2-2x+4\lambda=0$$

$$(\lambda+1)x^2-4(\lambda-2)x+4\lambda-5=0$$

$$2\lambda x^2-(4\lambda+2)x+2\lambda-5=0$$

$$(\lambda-1)x^2-(2\lambda-1)x+(\lambda-4)=0$$

۷ــ معلوم کنید بازاء چه مقداری از λ معادلات ذیل دارای ریشه‌های متساوی باشند

$$x^2-8x+\lambda=0 \quad و \quad \lambda x^2+2(\lambda+1)x+\lambda+3=0$$

$$(a-b)^2x^2+2(a^2-b^2)x+\lambda=0$$

۸ــ معادلهٔ ذیل را حل کنید و معلوم نمائید بازاء چه مقداری از m دو ریشه برابر نسبت داده شده‌اند

$$mx^2+5x^2-2mx-x=2-m$$

۹ــ در معادلهٔ $2(2m-1)x^2-4mx+m+2=0$ m را چنان معین کنید که دو ریشهٔ x' و x'' معادلهٔ مفروض در رابطهٔ ذیل صدق کنند $3x'x''+x'-2x''=0$

۱۰ــ فرض میکنیم x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند معادله تشکیل دهید که دو ریشه آن $\frac{x'}{x''}$ و $\frac{x''}{x'}$ باشند یا $x'+x''$ و $x'x''$ و یا $\frac{x'^2+x''}{x''}$ و $\frac{x''^2+x'}{x'}$

۱۱ــ ثابت کنید که مقدار λ هر چه باشد مجموع دو ریشه معادله ذیل همواره مساوی ۳ است

$$x^2-3x+\lambda=0$$

۱۲ــ ریشه‌های این معادله را در ۳ ضرب کنید $2x^2+x-1=0$

۱۳ــ ریشه‌های این معادله را بر ۳ قسمت کنید $x^2-3x-3=0$

۱۴ــ ثابت کنید که اگر b^2-4ac منفی باشد ریشه‌های معادله ذیل حقیقی نمیگردد

$$(b^2-4ac)x^2+2(2ac'+2ca'-bb')x+(b'^2-4a'c')=0$$

۱۵ــ ریشه‌های دو معادله ذیل را بقاعدهٔ تقریبات متوالیه استخراج کنید تا کسر $\frac{1}{10}$ تقریب

$$3x^2+254x+5=0 \quad , \quad 4x^2-925x-8=0$$

۱۶ــ معلوم کنید بازاء چه مقداری از λ مجموع مجذورات ریشه‌های معادله ذیل مساوی m^2 خواهد بود

$$x^2-\lambda x+2\lambda+4=0$$

۱۷ــ عدد ۱۹۰ را چه دستگاهی از شماره به ۲۷ نوشته میشود

۱۸ــ عدد ۳ را بر دو جزء چنان قسمت کنید که مجموع مجذورات آنها شود $\frac{53}{2}$

۱۹ــ مقدار a را چنان معین کنید که یکی از ریشه‌های معادله

$$x^2+\frac{5}{2}x+a^2=0$$

مجذور ریشهٔ دیگر باشد

۲۰ــ مابین ریشه‌های دو معادله ذیل رابطه بدست آورید

$$x^2+px+q=0 \quad , \quad x^2-2x\sqrt{p^2-2q}+p^2-2q=0$$

۲۱ــ عبارات ذیل را حساب کنید در صورتیکه x' و x'' ریشه‌های این معادله

$$x^2+px+q=0$$

باشند

$$x'^3+x''^3+3x'^2+3x''^2$$

و

$$x'^5+x''^5+5x'^4x''^2+4x'^3x''^3+5x'^2x''^4+x'^5+4x''^5$$

و

$$\frac{1}{x'^2}+\frac{2}{x'}+\frac{1}{x''^2}+\frac{2}{x''} \quad , \quad \frac{1}{x'^3}+\frac{3}{x'^2}+\frac{3}{x''^2}+\frac{5}{x'^3+x''^3}+2$$

۲۲ــ مقدار λ را چنان تعیین کنید که عبارت ذیل مجذور کامل گردد

$$x^2-4bx+4ab+\lambda^2-2\lambda x$$

۲۳ــ مقدار a و b را چنان معین کنید که دو معادله ذیل دارای ریشه‌های مشترک باشند

$$(a+1)x^2+2(2b+1)x-45=0$$

$$2(3-2b)x^2+(a+2)x-30=0$$

۲۴ــ مقدار m را چنان قرار دهید که تفاضل دو ریشهٔ معادله ذیل مساوی ۲ باشد

$$5x^2+12x+m=0$$

۲۵ــ مقدار λ را در معادله $x^2-3x+\lambda=0$ چنان تعیین کنید که ریشه‌های آن در یکی از این روابط ذیل صدق کند

$$x'^2+x''^2=3$$

$$x'^2-x''^2=1 \quad , \quad x'x''+x'+x''=5$$

و

۲۶ـ در معادله $x^2+px+q=0$ مابین p و q رابطه بدست آورید چنانکه اولاً یکریشه سه برابر ریشهٔ دیگر باشد ثانیاً مساوی آن

۲۷ـ مقدار m را چنان قرار دهید که ریشه‌های معادله ذیل متساوی گردند

$$3x^2-5x+m=0$$

۲۸ـ معادله تشکیل دهید که ریشه‌هایش متساوی ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ باشند با انضمام مقدار p و بعد مقدار p چنان اختیار کنید که معلوم q درجه درجهٔ اول متساوی معلوم متفق باشد شرح حالات را بیان کنید

۲۹ـ فرض میکنیم α و β و γ سه مقدار معلوم باشند و x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2+px+q=0$ معلوم شده شرایط ضرب p و q را بطوریکه تساوی ذیل حاصل شود

$$\alpha x'^2+\beta x'+\gamma=\alpha x''^2+\beta x''+\gamma$$

۳۰ـ فرض میکنیم x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+px+q=0$ باشند میخواهیم مقدار P و Q را بحسب p و q معلوم کنیم چنانکه یک معادله $X^2+PX+Q=0$ تشکیل شود که ریشه‌های آن در این دو رابطه صدق کنند $X'=\frac{x'^2}{x''-1}$ و $X''=\frac{x''^2}{x'-1}$

فصل چهاردهم

خواص ترینم درجه دوم

۱ـ تجزیه ترینم درجه دوم بعوامل درجه اول

۳۱۹ـ ترینم درجه دوم عبارتست از اکسپرسیون سه جمله ax^2+bx+c در صورتیکه ضرایب a و b و c مقادیر ثابت و معلوم باشند و x نمایش مقدار متغیریکه بتواند جمیع مقادیر ممکنه از $-\infty$ تا $+\infty$ را اختیار نماید و ما در این فصل میپردازیم بمعرفت خواص ترینم درجه دوم و محض اختصار بیان هر عددیکه بجای متغیر x قرار دهیم مقدار ترینم را صفر کند ریشهٔ ترینم نامیم و اغلب بجای ریشه نیز صفر ترینم گویند و بطور کلی اصفار هر کثیر الحدود یا معرف عبارتست از ریشه‌های معادله که حاصل شود در صورتیکه کثیر الحدود یا معرف مفروض را مساوی صفر فرض کنیم

۳۲۰ تنبیه ـ ترینم درجه دوم ax^2+bx+c را میتوان تبدیل کرد بحاصل ضرب a که مخالف صفر باشد در تفاضل دو مربع یا در یکمربع و یا در مجموع دو مربع در صورتیکه دیگر بیان

b^2-4ac مثبت یا صفر و یا منفی باشد

برهان — ترینم درجه دوم را میتوان همواره بصورت کلی ذیل درآورد

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

اولاً فرض میکنیم $b^2-4ac>0$ پس $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ را میتوان مجذور $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ تصور نمود و بنابراین ترینم مفروض متحد گردد با حاصل ضرب a در تفاضل دو مربع از این قرار

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

ولیکن چون تفاضل دو مجذور $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ و $\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$ دو مقدار $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ و $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ را تبدیل کنیم بحاصل ضرب مجموع آن دو مقدار در تفاضل آنها ترینم تجزیه شود بحاصل ضرب دو عامل درجه اول

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

و علاوه بر این چون ملاحظه کنیم (فقره ۳۰۲)

$$-x'=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ,\ -x''=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

چنین حاصل میشود $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$

ثانیاً فرض میکنیم $b^2-4ac=0$ در اینحالت ترینم بصورت حاصل ضرب

a در یک مربع درآید $ax^2+bx+c=a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2$

ثالثاً فرض میکنیم $b^2-4ac<0$ پس $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ یا $-\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ را میتوان مجذور $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ یا تصور نمود و در این حالت ترینم مفروض مبدل گردد بحاصل ضرب a در مجموع دو مربع از این قرار

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

۲۲۱ — **تنبیه ۱** — از روی این خواص مذکوره در ترینم میتوان ریشه های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ یعنی معادله که از مساوی صفر کردن ترینم مفروض حاصل شود بطریق ذیل استخراج نمود از این قرار اگر b^2-4ac مثبت باشد طرف اول این معادله را میتوان بصورت حاصل ضرب دو عامل درجه اول درآورد

$$a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0$$

و چون a مخالف صفر است پس شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب دو عامل صفر باشد کافیست که یکی از این دو عامل صفر گردد یعنی $x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$ یا $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$

و چون دو ریشه مختلفه معادله مفروضه را x' و x'' فرض کنیم

چنین نتیجه میشود $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

پس ترینم بصورت ذیل نیز نوشته میشود

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

و از اینجا ظاهر است که ترینم بازاء هر مقدار دیگر از x غیر x' و x'' مخالف صفر خواهد بود و حال اگر فرض کنیم $b^2-4ac=0$ آنگاه معادله مزبور بصورت درآید $a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=0$ و واضح است که این معادله فقط بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ صفر میگردد پس فقط یک ریشه قبول میکند ولیکن در اینحالت گویند معادله دارای دو ریشه متساوی یا یک ریشه مضاعف است زیرا که چون مقادیر a و b و c را تغییر دهیم بقسمیکه b^2-4ac مقادیر مثبته اختیار کند معادله دارای دو ریشه خواهد بود یکی کوچکتر و دیگری بزرگتر از $-\frac{b}{2a}$ و وقتیکه b^2-4ac میل کند در سد به صفر این دو ریشه نیز متقارب به $-\frac{b}{2a}$ پس اگر ریشه مضاعف را فرض کنیم چنین حاصل میشود

$$ax^2+bx+c=a(x-x')^2$$

بالاخره وقتیکه b^2-4ac منفی باشد طرف اول معادله باین

صورت درآید ax^2+bx+c

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

و در این حالت ترینم بازاء هیچ مقدار مثبت یا منفی که بجای x قرار دهیم صفر نخواهد بود چونکه مقدار متغیر $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ غیر از مثبت یا صفر نتواند باشد و مقدار ثابت $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ نیز همواره مثبت است و بنابراین هیچ مقدار مثبت یا منفی از x در معادله صدق نکند

تجزیه ترینم درجه دوم بحاصل ضرب دو عامل درجه اول همواره ممکن است و اما وقتیکه (b^2-4ac) منفی باشد ریشه‌های ترینم موهومی میگردد (نمره ۳۰۵) و عوامل درجه اول دارای ضرایب موهومی خواهند بود در اینحالت ترینم تجزیه شود بحاصل ضرب دو عامل موهومی از درجه اول و مقادیر موهومی بدست آیند که چون بجای x قرار دهیم ترینم را صفر سازند

۳۲۲ — **تنبیه ۲** — از روی تجزیه ترینم درجه دوم بعوامل درجه اول وقتیکه (b^2-4ac) بزرگتر یا مساوی صفر باشد میتوان روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها را باین طریق بدست آورد چون دو ریشه حقیقی مختلفه یا متساوی x' و x'' بجائیم در هر دو حالت چنین خواهیم داشت

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

و بعد

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x'+x'')x+ax'x''$$

و چون دو کثیرالجمله مرفین متعادل و متحد هستند پس لازم میآید که ضرایب متشابه یک قوه از x باشند متساوی گردند یعنی $b=-a(x'+x'')$ و $c=ax'x''$ یا $x'+x''=-\frac{b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$

۳۲۳- و بالعکس از روی روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها نیز میتوان ترینم را بعوامل درجه اول تجزیه نمود از این قرار چون $x'+x''=-\frac{b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$ پس چنین حاصل میشود $ax^2+bx+c=$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

و پس از اختصار چنین میشود $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$

مثال ۱- ترینم $3x^2-5x-8$ را بعوامل درجه اول تجزیه کنید

چون معادله $3x^2-5x-8=0$ را حل کنیم این دو ریشه بدست میآید $x'=-1$ و $x''=\frac{8}{3}$ پس

$$3x^2-5x-8=3(x+1)\left(x-\frac{8}{3}\right)=(x+1)(3x-8)$$

مثال ۲- ترینم $49x^2-70x+25$ را بعوامل درجه اول تجزیه کنید- معادله $49x^2-70x+25=0$ دارای دو ریشه متساوی است $x'=\frac{5}{7}$ پس $49x^2-70x+25=49\left(x-\frac{5}{7}\right)^2=(7x-5)^2$

مثال ۳- ترینم $4x^2-12x+13$ را بعوامل درجه اول تجزیه کنید

ریشه‌های معادله $4x^2-12x+13=0$ عبارتند از $x=\frac{3\pm2\sqrt{-1}}{2}$

پس $4x^2-12x+13=4\left(x-\frac{3-2\sqrt{-1}}{2}\right)\left(x-\frac{3+2\sqrt{-1}}{2}\right)=$

$$=(2x-3)^2+4=(2x-3-2\sqrt{-1})(2x-3+2\sqrt{-1})$$

۲- علامات ترینم درجه دوم بحسب علامات مقادیر مختلفه x

۳۲۴ هرگاه x تغییر کند یعنی مقادیر حقیقیه ممکنه به x داده شود ترینم ax^2+bx+c میتواند مقادیر مثبته یا منفیه اختیار کند در حقیقت ترینم معرفت از x و از روی قضیه ذیل بدون هیچ تبدیلی میتوان علامات ترینم را بازاء هر مقدار غیر مشخصی از x معلوم نمود

قضیه- اولاً وقتیکه ترینم ax^2+bx+c دارای ریشه‌های حقیقی و مختلف باشد بازاء هر مقدار x واقع در خارج ریشه‌ها یعنی کوچکتر از ریشه کوچکتر یا بزرگتر از ریشه بزرگتر باشد علامت ترینم مطابق است با علامت ضریب a و بازاء هر مقدار x واقع مابین ریشه‌ها علامت ترینم مخالف علامت a است ثانیاً اگر ریشه‌ها متساوی باشند بازاء هر مقدار x علامت ترینم مطابق علامت a است مگر بازاء مقدار $x=-\frac{b}{2a}$

مقدار ترنیم صفر میشود ثالثاً وقتیکه ریشه‌ها موهومی باشند هرچه باشد مقدار x علامت ترنیم همواره مطابق است با علامت a

اولاً — فرض میکنیم ریشه‌های ترنیم حقیقی و مختلف باشند یعنی $b^2-4ac>0$ و ریشه کوچکتر را به x' و بزرگتر را به x'' مینامیم پس در این حالت ترنیم را باینصورت درآوردیم $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$

چون بازاء هر مقدار x کوچکتر از x' دو عامل $(x-x')$ و $(x-x'')$ منفی هستند پس حاصل ضربشان مثبت میشود و بنابراین علامت ترنیم $a(x-x')(x-x'')$ مطابق علامت a است و بازاء هر مقدار x واقع مابین x' و x'' عامل $(x-x')$ مثبت است و عامل $(x-x'')$ منفی و بنابراین علامت حاصل ضرب $a(x-x')(x-x'')$ با ترنیم مخالف a خواهد بود و بالاخره بازاء هر مقدار x بزرگتر از x'' دو عامل $(x-x')$ و $(x-x'')$ مثبت شوند و علامت ترنیم مطابق است با a

ثانیاً فرض میکنیم ریشه‌های ترنیم متساوی باشند یعنی $b^2-4ac=0$ پس چنین خواهیم داشت $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ بازاء هر مقدار x غیر از $-\frac{b}{2a}$ مقدار $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ مثبت است

پس ترنیم بعلامت a خواهد بود و بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ ترنیم صفر میشود

ثالثاً. فرض میکنیم بالاخره ترنیم دارای ریشه نباشد یعنی $b^2-4ac<0$ پس در این حالت میتوان ترنیم را باین صورت درآورد

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

چون $4ac-b^2$ منفی است پس $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ مثبت میشود و مقدار $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ نیز مثبت خواهد بود هرچه باشد مقدار x بنابراین علامت ترنیم همواره مطابق است با علامت a

این قضیه مذکوره را میتوان بطریق مختصر چنین ادا نمود که علامت ترنیم درجه دوم همواره مطابق است با علامت جمله اولش باستثنای وقتیکه مقادیر x واقع گردند مابین ریشه‌ها زیرا که اگر ریشه‌ها متساوی یا موهومی باشند نمیتوان مابین ریشه‌ها هیچ مقداری برای x داد

مثال ۱ — ترنیم $2-x+x^2$ ریشه‌هایش عبارتند از $-\frac{2}{3}$ و $+\frac{1}{2}$ پس وقتیکه x از $-\infty$ تا $-\frac{2}{3}$ و از $+\frac{1}{2}$ تا $+\infty$ تغییر کند ترنیم مفروض مثبت است و اگر x از $-\frac{2}{3}$ تا $+\frac{1}{2}$ تغییر کند ترنیم مفروض منفی است

مثال ۲ – ترینم $8x^2-2x+5$ دارای دو ریشه $-\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{2}$ است
و چون ضریب x^2 منفی است پس وقتیکه x از $-\infty$ تا $-\frac{5}{4}$ تغییر کند
ترینم منفی است و اگر x بین $-\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{2}$ تغییر کند ترینم مثبت است
و چون x بین $\frac{3}{2}$ و $+\infty$ تغییر کند ترینم منفی است

مثال ۳ – ترینم $3x^2-10x+9$ دارای ریشه نیست و چون ضریب
x^2 مثبت است پس ترینم بازاء هر مقدار حقیقی x مثبت خواهد شد

۳۲۵ — هرگاه مقدار ترینم درجه دوم را بـ $f(x)$ نمائیم
یعنی $f(x)=ax^2+bx+c$ خلاصه نتایج قضیه فوق چنین میشود

x	$-\infty$		x'		$-\frac{b}{2a}$		x''		$+\infty$
$b^2-4ac>0$		بعلامت $+a$		0		بعلامت $-a$		0	بعلامت $+a$
$f(x)$									

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$b^2-4ac=0$		بعلامت $+a$	0	بعلامت $+a$	
$f(x)$					

x	$-\infty$		$+\infty$
$b^2-4ac<0$		بعلامت a است	
$f(x)$			

۳۲۶ تنبیه ۱ – هرگاه در ترینم $f(x)=ax^2+bx+c$

نتیجه تبدیل x به α یعنی $f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c$ مخالف علامت ضریب
a باشد ریشه‌های ترینم حقیقی و مختلف میشوند و عدد α واقع مابین دو ریشه
زیرا اگر ریشه‌های ترینم متساوی یا موهومی بودند بموجب قضیه سابقه لازم
میآمد که علامت ترینم بازاء هیچ مقدار حقیقی x مخالف علامت a نباشد بنابراین
ریشه‌های ترینم حقیقی و متمایزند و علاوه بر این عدد α واقع مابین دو ریشه و
لازم میآید که نتیجه تبدیل x به α مطابق علامت a باشد این خلاف فرض است

مثال ۱ – در معادله $ax^2+bx+c=0$ چون x را به صفر تبدیل کنیم
حاصل میشود c و حال اگر c بعلامت مخالف a باشد ریشه‌های معادله حقیقی و مختلف میباشند

مثال ۲ – در معادله $(x-a)(x-b)=c$ ضریب x^2 واحد است پس
اگر x را به a یا b تبدیل کنیم حاصل میشود c – بنابراین معادله دارای دو
ریشه حقیقی است و اگر c صفر باشد ریشه‌های معادله عبارتند از a و b

مثال ۳ – در معادله $(x-a)(x-b)+(x-a)+(x-b)=0$ ضریب
x^2 واحد است و اگر فرض کنیم b (a و x را تبدیل کنیم $-b$ حاصل میشود
مقدار منفی $a-b$ پس معادله دارای دو ریشه حقیقی است و اگر $a=b$
معادله باین صورت درآید $(x-a)(x-a+2)=0$ و دو ریشه چنین میشوند a و $a-2$

۳۲۷ — **نتیجه** — هرگاه در ترینم $f(x)=ax^2+bx+c$ بجای x مقدار جائز عدد α و β قرار دهیم $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ بعلامت مخالف یکدیگر باشند ترینم دارای دو ریشه حقیقی و متمایز خواهد بود و یکی از آنها در ریشه واقع است مابین α و β زیرا که فرض میکنیم علامت ترینم بازاء $x=\alpha$ مخالف علامت a باشد و بازاء $x=\beta$ مطابق آن پس بمقتضای نتیجه دو ریشه ترینم حقیقی و مختلف میگردند علاوه بر این عدد α واقع باشد مابین این دو ریشه یعنی $x'<\alpha<x''$ در صورتیکه $x'<x''$ مثال هرگاه در معادله $5x^2-60x+324=0$ بجای x مقدار جائز $\frac{1}{2}$ قرار دهیم دو مقدار مختلف العلامه -12 و $\frac{57}{4}$ بدست میآید پس معادله دارای دو ریشه حقیقی است یکی از آنها واقع است مابین $\frac{1}{2}$

۳۲۸ — مکان عدد α را نسبت بریشه‌های معادله درجه دوم بدون حل آن معادله معلوم کنید $f(x)=ax^2+bx+c=0$ ابتدا مقدار $f(\alpha)$ را حساب میکنیم اگر علامت این مقدار مخالف a باشد معلوم میشود که معادله مفروضه دارای دو ریشه حقیقی است (نمره ۳۲۶) و عدد α واقع است مابین آن دو ریشه و اما اگر مقدار $f(\alpha)$ مطابق علامت a باشد نمیتوان تعیین کرد که معادله ریشه داشته باشد پس در این حالت باید b^2-4ac را تشکیل داد اولاً

فرض میکنیم $b^2-4ac>0$ معلوم میشود که معادله مفروضه ریشه دارد ثانیاً اگر $b^2-4ac=0$ معادله فقط دارای یک ریشه $\frac{-b}{2a}$ است که میتوان آنرا مستقیماً به α سنجید ثالثاً هرگاه $b^2-4ac<0$ معادله دارای دو ریشه حقیقی است و α واقع است در خارج ریشه‌ها و حال برای دانستن اینکه α بزرگتر یا کوچکتر است از آن دو ریشه چون عدد α باید یکی نسبت بزرگتر یا کوچکتر باشد از هر دو ریشه و از هر عددی که مابین آن دو ریشه باشد کافی است که α را بیک عددی مابین آن دو ریشه سنجید که پیش از وقت عددی مابین دو ریشه معلوم نباشد کافی است α را بنصف مجموع دو ریشه که واقع مابین آن دو ریشه سنجید زیرا که از نامساوی $x'<x''$ چنین حاصل میشود $2x'<x'+x''<2x''$ یا $x'<\frac{x'+x''}{2}<x''$

۳۲۹ — ریشه‌های معادله درجه دوم را نسبت بدو عدد α و β بترتیب دیدن

حل آن معادله $f(x)=ax^2+bx+c=0$

ممکن است قاعده مذکوره در نمره فوق را در هر کدام از این دو عدد جاری کرد لیکن اگر $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را تشکیل دهیم عمل خیلی مختصر میشود

اولاً هرگاه $f(\alpha)f(\beta)<0$ معادله دارای دو ریشه حقیقی است نمره (۳۲۷) و یکی از آن دو عدد α و β واقع باشد مابین آن دو ریشه و اگر فرض کنیم $f(\alpha)$

علامت f باشد α واقع شود در خارج ریشه‌ها و این ترتیب ذیل نتیجه میشود

α β α در صورتیکه فرض کنیم $\alpha < \beta$

ثانیاً هرگاه $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ ولیکن علامت $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ مخالف

α باشد پس معلوم میشود که معادله دارای دو ریشه حقیقی است (فقره ۳۲۶)

و دو عدد α و β واقعند مابین آن دو ریشه و این ترتیب ذیل حاصل میشود

α β ثالثاً فرض میکنیم علامت $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ مطابق

α باشد در این حالت نمیتوان فهمید که معادله دارای ریشه هست یا نه پس باید

دیسکریمینان b^2-4ac را تشکیل داد هرگاه مقدار دیسکریمینان منفی باشد

معادله ریشه ندارد و اگر این مقدار صفر باشد معادله فقط دارای یک ریشه

$-\frac{b}{2a}$ است که میتوان آن را بلافاصله بین دو عدد α و β سنجید و بالاخره هرگاه

b^2-4ac مثبت باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی است و دو عدد α

و β هر دو خارج اند در ریشه‌ها علاوه بر این میدانیم که این دو ریشه با $-\frac{b}{2a}$ نسبت بعد

α و β یک ترتیب قرار خواهند گرفت بنابراین ترتیب $-\frac{b}{2a}$ را نسبت به α و β

معین میکنیم و آنوقت هر دو ریشه یکمرتبه واقع میگردد و یکی از این سه فاصله ذیل که

شامل $-\frac{b}{2a}$ باشد $-\infty$ α β $+\infty$

مثال ۱ـ هرگاه در ترینم $f(x)=325x^2-783x+287$ فرض کنیم $x=1$

مقدار منفی $f(1)=-171$ حاصل میشود پس بدون محاسبه دیسکریمینان چنین

استنباط میکنیم که ریشه‌های ترینم حقیقی اند و عدد ۱ واقع است مابین آن دو ریشه

چون در همین ترینم مقدرجا فرض کنیم $x=0$ و $x=2$ یعنی $f(0)=287$

$f(2)=31$ از تشکیل دیم دو نتیجه مثبت بدست میآید پس معلوم میشود که یکی از دو

ریشه‌ها واقع است مابین ۰ و ۱ و دیگری مابین ۱ و ۲

مثال ۲ـ مقادیر ریشه‌های ترینم $f(x)=25x^2-184x+179$ را

نسبت به دو عدد ۱ و ۵ امتحان کنید

نتیجه تبدیل x به ۱ و ۵ اعداد مثبت از دو عدد مثبت $f(1)=20$ و $f(5)=839$

یعنی بعلامت α پس در این صورت باید دیسکریمینان را تشکیل داد و چون مقدار

دیسکریمینان $(b^2-4ac=184^2-4\times25\times179=3989)$ مثبت است پس ریشه‌های

ترینم حقیقی باشند و نصف مجموع دو ریشه یعنی $\frac{92}{25}$ واقع است مابین ۱ و ۵

بنابراین ریشه‌ها واقع میگردد مابین ۱ و ۵ یعنی یکی مابین ۱ و $\frac{92}{25}$ و دیگری مابین $\frac{92}{25}$ و ۵

مثال ۳ـ ریشه‌های معادله $x^2-2(3\lambda+2)x+9\lambda=0$ را نسبت

به ۰ و ایجاب مقادیر λ که از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ترتیب دهید ابتدا $f(0)$

(۱) f را تشکیل میدهیم $f(0)=9\lambda$ و $f(1)=-3$ و چون مقدار $f(1)$ همواره منفی است پس معادله مفروضه همواره دارای ریشه‌های حقیقی خواهد بود و اما $f(0)$ بازاء $\lambda=0$ تغییر علامت کند و ما خلاصه این نتایج را در جدول ذیل قرار دهیم

λ	$-\infty$				0			$+\infty$
$f(0)$		$-$				$+$		
$f(1)$		$-$				$-$		
	x	0	1	x'	0	x	1	x'

مثال ۲ـ ریشه‌های معادله ذیل را نسبت به ۱ و ۰ مرتب کنید

$$(\lambda-1)x^2-2(3\lambda+1)x+9\lambda=0$$

ابتدا $f(0)$ و $f(1)$ را تشکیل میدهیم $f(1)=16\lambda+1$ و $f(0)=9\lambda$ چون این دو مقدار تغییر علامت کنند وقتیکه λ بگذرد بر دو مقدار $-\frac{1}{16}$ و ۰ و ضریب x^2 نیز با $\lambda=1$ تغییر علامت کند و ما خلاصه این نتایج را در جدول ذیل آوریم

λ	$-\infty$		$-\frac{1}{16}$		0		1	$+\infty$
ضریب x^2			$-$	$-$		$-$		$+$
$f(0)$			$-$	$+$		$+$		$+$
$f(1)$			$-$	$-$		$+$		$+$
		x	-1 x'	x	0	x	1	x'

می‌بینیم که از فاصله (۰ و $-\frac{1}{16}$) معادله صاحب دو ریشه است و اما واقع باشد مابین این دو ریشه و در خارج باین ترتیب ۰ x x' ۱ x

و در فاصله (۱ و ۰) معادله دارای دو ریشه است و اولی واقعند مابین این دو ریشه باین ترتیب x ۰ ۱ x' و برای فاصله ($-\infty$ و $-\frac{1}{16}$) و ($+\infty$ و ۱) باید ax^2+bx+c را تشکیل $=(\lambda-1)(9\lambda-(3\lambda+1)^2)$ $+1+15\lambda$ = پس هرگاه λ بزرگتر از $-\frac{1}{15}$ باشد معادله دارای دو ریشه خواهد بود و این مقدار کوچکتر است از $-\frac{1}{16}$ ـ پس از فاصله $-\infty$ تا $-\frac{1}{15}$ ـ معادله ریشه ندارد و اما برای فاصله $-\frac{1}{15}$ تا $-\frac{1}{16}$ ـ نصف مجموع دو ریشه یعنی $\frac{3\lambda+1}{\lambda-1}$ را تشکیل میدهیم مخرج این کسر منفی است و صورتش مثبت پس مقدار کسر نیز منفی است و آنرا به ۱ـ می‌سنجیم بنابراین تفاضل $\frac{3\lambda+1}{\lambda-1}-(-1)$ را حساب میکنیم و چون ۱ـ λ منفی است پس تفاضل مفروض مثبت میشود و نصف مجموع ریشه‌ها بزرگتر شود از ۱ـ بنابراین دو ریشه واقع میگردد مابین ۰ و ۱ـ باین ترتیب ۰ x x' ۱ـ و اما در فاصله اخیر محاسبه نصف مجموع دو ریشه بی فایده است چونکه حاصل ضرب $\frac{9\lambda}{\lambda-1}$ مثبت است و هم چنین $\frac{2(3\lambda+1)}{\lambda-1}$ پس هر دو ریشه مثبت میگردند و این ترتیب نتیجه میشود x x' ۰ ۱ـ

۳ـ نامساویهای درجه دویم

۲۳۰ — **حل نامساوی درجه دویم** یک نامساوی یک مجهولی درجه دویم را پس از نقل جمیع حدود بیک طرف و اختصارات لازمه میتوان همواره بیکی از دو صورت ذیل درآورد

$$(1)\quad ax^2+bx+c>0 \qquad (2)\quad ax^2+bx+c<0$$

و چون بواسطه تغییر علامت طرفین میتوان همواره نامساوی (۲) را بصورت نامساوی (۱) درآورد پس اکتفا کنیم فقط به بحث نامساوی (۱)

حل کردن نامساوی $ax^2+bx+c>0$ عبارتست از یافتن مقادیری از x که بازاء آنها ترینم ax^2+bx+c مقادیر مثبت اختیار کند بنابراین باید ابتدا علامت دیسکریمینان b^2-4ac را معلوم نمود

اولا فرض میکنیم a مثبت باشد در این حالت هرگاه $b^2-4ac\leqq 0$ بازاء هر مقداری از x مقدار ترینم مثبت میشود بنابراین نامساوی (۱) همواره محقق و برقرار است مگر بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ وقتیکه b^2-4ac مقدار ترینم صفر میشود و اگر دیسکریمینان b^2-4ac مثبت باشد بازاء هر مقداری از x که در خارج ریشه‌ها باشد یعنی بزرگتر از ریشه بزرگتر و کوچکتر از ریشه کوچکتر باشد مقدار ترینم مثبت است بنابراین نامساوی (۱) همواره محقق است

ثانیاً فرض میکنیم a منفی باشد در این صورت هرگاه $b^2-4ac\leqq 0$ باز همواره بعلامت a است یا صفر بنابراین نامساوی (۱) بازاء هیچ مقداری از x هرگز محقق نمیشود و اگر $b^2-4ac>0$ نامساوی (۱) فقط بازاء هر مقداری از x مابین دو ریشه محقق میگردد

و در نامساوی (۲) عکس حالات مذکوره فوق حاصل شود

مثال ۱ — فرض میکنیم دو نامساوی ذیل را

(۱) $8x^2-12x+7>0$ (۲) $5x^2-14x+11<0$

ریشه‌های هر دو ترینم موهومی هستند پس نامساوی (۱) بازاء هر مقداری از x محقق است ولیکن نامساوی (۲) بازاء هیچ مقدار x محقق نیست

مثال ۲ — در نامساوی $8x^2-22x+15>0$ دو ریشه ترینم عبارتند از $\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{2}$ پس جمیع مقادیر x محصوره مابین $(-\infty \text{ و } \frac{5}{4})$ $(\frac{3}{2} \text{ و } +\infty)$ در نامساوی مفروض صدق میکنند و اما جمیع مقادیر x که در نامساوی ذیل $8x^2-22x+15<0$ صدق کنند واقعند مابین دو ریشه $\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{2}$

۲۳۱ — هرگاه نامساوی حل کردنی از درجه بالاتر از درجه دوم باشد طرف اول آنرا بصورت ABC حاصل ضرب عوامل درجه اول تجزیه نمودیم درآوریم

چه هیچ یک A و B و C از کثیر الجملهای درجه اول یا درجه دوم باشند و بعد علامت هر کدام از عوامل را جداگانه معلوم میکنیم و مقادیری بجهت x اختیار میکنیم که بازاء آنها حاصل ضرب ABC علامت (+) باشد ولیکن چون هر کدام از این عوامل A و B و C تواند تغییر علامت کند مگر وقتیکه دارای ریشه باشد پس ابتدا ریشه های سه عامل را استخراج میکنیم و بعد این ریشه ها را بحسب مقادیر صعودی مرتب میکنیم تا رشته اعدادی تشکیل شود که اگر چنانچه مقادیر x واقع گردند مابین هر دو عدد متوالیه از این رشته هر کدام از عوامل مذکوره دارای علامت ثابتی باشد بنابراین برای حل نامساوی مفروض کافیست که مقادیر x را مابین فواصلی اختیار کنیم که علامت حاصل ضرب عوامل (+) باشد و علاوه بر این باید دانست که هرگاه یکی از عوامل همواره یک علامت ثابتی باشد میتوان طرفین نامساوی را بر آن عامل قسمت کرده آنرا حذف نمود (بدیهی است که اگر عامل حذف گردد منفی باشد باید جهت نامساوی را تغییر داد)

مثال ۱ـ نامساوی ذیل را حل کنید

$$(x-1)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)<0$$

عامل دوم تجزیه شود بر $(x-2)(x-1)$ پس چنین خواهیم داشت

ax^2+bx+c

$(x-1)^2(x-2)(x^2+x+1)<0$ و چون عوامل مثبته $(x-1)^2$ و (x^2+x+1) را حذف نمود پس نامساوی مفروض منجر شود بهصورت $x-2<0$ بنابراین نامساوی بازاء x همواره محقق است

مثال ۲ـ نامساوی ذیل را حل کنید

$$(x-1)^4(x^2-5x+6)(x^3-2x^2+2x-1)>0$$

چون عامل $(x-1)^4$ مثبت است میتوان آن را حذف نمود و عامل (x^2-5x+6) چون قابل قسمت است بر $(x-1)$ آنرا میتوان چنین نوشت $(x-1)(x^2-x+1)$ پس نامساوی مفروض باین صورت درآید $(x-1)(x^2-x+1)(x-1)(x-3)(x-2)>0$ عامل اخیر همواره مثبت است چونکه دیسکریمینان منفی است پس کافیست که سه عامل اول را ملاحظه نموده و از آنها فاصله های ذیل نتیجه شود

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$		$+$	

پس می بینیم که هرگاه مقادیر x را در فاصله اول و سوم اختیار کنیم در نامساوی مفروض صدق نمیکند ولیکن اگر مقادیر x در فاصله دوم و آخر یعنی مابین ۱ و ۲ و یا بزرگتر از ۳ باشند نامساوی محقق میگردد

مثال ۳ـ نامساوی ذیل را حل کنید

$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3)(x^2+x+1) > 0$

چون عامل چهارم همواره مثبت است میتوان آن را حذف نمود و نامساوی مفروض معادل گردد با نامساوی ذیل

$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3) > 0$ و بازاء $x=0$ صفر میشود و همچنین عامل دوم بازاء $x=1$ و $x=2$ و عامل سوم بازاء $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-3$ نیز صفر میگردند و چون در علامات عوامل بحث کنیم می‌بینیم که نامساوی مفروض فقط در سه حالت ذیل محقق است وقتیکه $-3 < x < -\frac{1}{2}$ یا $0 < x < 1$ و یا $2 < x$ پس از آنجا جدول ذیل تشکیل میشود

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		0		1		2		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

۲۳۲- وقتیکه نامساوی حل کردنی کسری باشد بصورت $\frac{A}{B} > 0$ چون طرفین آنرا در مجذور مخرج ضرب کنیم تبدیل شود بنامساویهای سابقه دار است که نامساوی $\frac{A}{B} > 0$ معادل است با نامساوی $AB > 0$ و علاوه بر این ممکن است هر نامساوی کسری را مستقیماً حل نمود باین طریق که در علامت صورت و مخرج آن علاحده بحث کنیم و اگر نامساوی حل کردنی ابتدا بصورت $\frac{A}{B} > 0$ نباشد جمیع جمل آنرا بطرف اول نقل میکنیم تا باین صورت در آید

مثال- حل کنید این نامساوی را $\frac{3x+1}{2x-5} > 10$ چون دو طرف نامساوی را در مجذور $(2x-5)$ که مقدار آن بازاء هیچ مقدار حقیقی x منفی نیست ضرب کنیم نامساوی مفروض بصورت ذیل در میآید

$(3x+1)(2x-5) > 10(2x-5)^2$ و چون جمیع جمل را بطرف اول نقل کنیم پس از اختصار چنین میشود $(x-3)(2x-5) > 0$ پس مقادیر x که در نامساوی مفروض صدق کنند واقعند مابین $\frac{5}{2}$ و 3

مثال ۲- نامساوی ذیل را حل کنید $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-3} > x$ پس از نقل جمیع جمل بطرف اول و اختصارات لازمه چنین میشود $\frac{x^3-5x^2+9x-5}{(x-2)(x-3)} > 0$ و چون طرفین را در مجذور مخرج ضرب کنیم چنین میشود $(x^3-5x^2+9x-5)\times(x-2)(x-3) > 0$ و چون عامل اول قابل قسمت است بر $(x-1)$ پس میتوان چنین نوشت $(x-1)(5+4x-x^2)\times(x-2)(x-3) > 0$ و علاوه بر این عامل $(5+4x-x^2)$ همواره مثبت است پس میتوان از آن صرف نظر نمود و بنابراین نامساوی حل کردنی چنین خواهد بود $(x-3)(x-2)(x-1) > 0$ و چون بطریق مشابه سابق بحث کنیم می‌بینیم که نامساوی مفروض بازاء $1 < x$ و $3 < x$ و $2 < x$ محقق است

مثال ۳- حل کنید این نامساوی را $1+\frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}$

چون جمیع حل را بطرف اول نقل کنیم پس از اختصارات لازمه چنین میشود

$\frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)} > 0$ صورت کسر طرف اول نامساوی بازاء $x=2\pm\sqrt{3}$ صفر میشود و مخرجش بازاء $x=1$ و $x=3$، چون صورت را N و مخرج را D بنامیم جدول علامات صورت و مخرج و همچنین کسر $\frac{N}{D}$ طرف اول نامساوی بازاء مقادیر x چنین میشود

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	1	3	$\sqrt{3}$	$+\infty$
N	+	−	−	−	+	
D	+	+	−	+	+	
$\frac{N}{D}$	+	−	+	−	+	

۴- تغییرات ترنیم درجه دویم

۳۳۳- تغییرات ترنیم درجه دویم اتصالی است

هرگاه در ترنیم $y=ax^2+bx+c$ مقدار متغیر x از $-\infty$ تا $+\infty$ بطریق اتصالی تغییر کند مقدار ترنیم y نیز بطریق اتصالی تغییر خواهد کرد فرض میکنیم دو مقدار متوالیه x و $x+h$ متغیر x داده شود (h مقداریست مثبت و بی نهایت کوچک) y نیز دو مقدار نظیر y و $y+K$ اختیار خواهد نمود و حال گوئیم که میتوان مقدار h را آنقدر

کوچک گرفت که تغییر ترنیم نیز آنقدر کوچک شود که بخواهیم

برهان- چون دو تساوی $y=ax^2+bx+c$ و $y+K=a(x+h)^2+b(x+h)+c$ را از یکدیگر تفاضل کنیم پس از اختصار این تساوی ذیل حاصل شود

$$K=2axh+ah^2+bh=h(2ax+b+ah)$$

و چون h خیلی کوچک است میتوان همواره آنرا مابین ۰ و عدد معلوم α تصور نمود و بنابراین کسر $2ax+b+ah$ نزدیک شود به $2ax+b$ و دارای مقدار محدود مطلقی باشد که هرگز نتواند از عدد M تجاوز کند پس مقدار مطلق K کوچکتر خواهد شد از Mh و لیکن میتوان h را آنقدر کوچکتر گرفت که حاصل ضرب Mh کوچکتر گردد از هر عدد بی نهایت کوچک ε یعنی $h<\frac{\varepsilon}{M}$ که در وقت مقدار مطلق K بطریق اولی کوچکتر شود از ε و علاوه براین چون K نابش نمود (مثبت یا منفی) ترنیم است وقتیکه x از x رسد به $x+h$ پس ترنیم بازاء تغییرات اتصالیه x بطریق اتصالی تغییر خواهد نمود

مثال- در ترنیم $y=5x^2+3x-7$ فرض میکنیم $x=8$ و

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$ پس $y = 337$ و $M = 2.5.8 + 3 = 83$

و $\alpha = \frac{\varepsilon}{M} = \frac{1}{83000}$ پس بازاء هر مقداری از x محصور مابین

$8 - \frac{1}{83000}$ و $8 + \frac{1}{83000}$ مقدار ترینم واقع گردد مابین

$337 - \frac{1}{1000}$ و $337 + \frac{1}{1000}$

۲۲۲ — **جهت تغییرات ترینم درجه دویم** — برای دانستن تغییرات معرف $y = ax^2 + bx + c$ وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ابتدا ترینم را بصورت ذیل در آوریم

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

و بعد چنین قرار میدهیم $Z = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$

و از آنجا $y = aZ$ مقدار y مساویست با حاصل ضرب a در Z یعنی حاصل جمع دو مقدار جبری که یکی $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ ثابت است و دیگری $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ مقداریست متغیر پس برای پیروی تغییرات y باید تغییرات Z معین نمود و برای تعیین تغییرات Z کافیست که تغییرات $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ را معلوم کنیم بنابراین گوئیم که هرگاه x از $-\infty$ تا $-\frac{b}{2a}$ ترقی کند مقدار $x + \frac{b}{2a}$ منفی است و از $-\infty$ ترقی کند تا رسد به ۰

و مقدار مطلقش از $+\infty$ تا ۰ تنزل میکند و مجذورش $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ نیز از $+\infty$ تنزل کند تا رسد به ۰ پس وقتیکه x از $-\infty$ تا $-\frac{b}{2a}$ ترقی کند مقدار Z از $+\infty$ تنزل کند تا رسد بمقدار $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ و چون x از $-\frac{b}{2a}$ تا $+\infty$ ترقی کند مقدار $x + \frac{b}{2a}$ مثبت است و از ۰ تا $+\infty$ نمو میکند و مجذورش نیز از ۰ ترقی کند تا رسد به $+\infty$ پس Z از مقدار $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ ترقی کند و رسد به $+\infty$

خلاصه این تغییرات در جدول ذیل نموده شده است

x	$-\infty$	↗	$-\frac{b}{2a}$ نمو کند	↗ $+\infty$ نمو کند
Z	$+\infty$	↘	$\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ تنزل کند	↗ $+\infty$ ترقی کند

و حال برای یافتن تغییرات $y = ax^2 + bx + c$ دو حالت منظور آوریم بحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد

حالت اول ($a > 0$) مقدار y ترقی میکند وقتیکه مقدار Z ترقی کند و تنزل میکند وقتیکه مقدار Z تنزل کند خلاصه تغییرات را در جدول ذیل نموده

$a > 0$

x	$-\infty$	↗	$-\frac{b}{2a}$ نمو کند	↗ $+\infty$ نمو کند
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac - b^2}{4a}$ تنزل کند	↗ $+\infty$ ترقی کند

مقدار $\frac{4ac-b^2}{4a}$ نظیر $x=-\frac{b}{2a}$ عبارتست از ماکزیموم یعنی کوچکترین مقداری
که ترینم اختیار کند و علاوه بر این چون y بطریق اتصالی تغییر میکند وقتیکه
x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند پس ضمناً دو مرتبه بهر مقدار بزرگتر از $\frac{4ac-b^2}{4a}$
خواهد گذشت و فقط یکمرتبه باین مقدار ماکزیموم میگذرد و باید متذکر شد که هرگاه
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ کوچکتر از صفر باشد یعنی $4ac-b^2$ مثبت باشد در این صورت ترینم بازاء
دو مقدار مختلف x دو مرتبه از صفر خواهد گذشت یعنی دارای دو ریشه حقیقی و متمایز خواهد بود
حالت دویم $a<0$ مقدار y یا حاصل ضرب az ترقی میکند وقتیکه z تنزل کند
و تنزل میکند وقتیکه z ترقی کند خلاصه این تغییرات در جدول ذیل نموده شده است

x	$-\infty$	ترقی کند	$-\frac{b}{2a}$	تنزل کند	$+\infty$
y	$-\infty$	ترقی کند	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	تنزل کند	$-\infty$

$a<0$

مقدار $\frac{4ac-b^2}{4a}$ نظیر $x=-\frac{b}{2a}$ در این حالت عبارتست از ماکزیموم
یعنی بزرگترین مقداری که ترینم اختیار کند و علاوه بر این چون تغییرات ترینم
اتصالی است y دو مرتبه بهر مقدار کوچکتر از ماکزیموم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ خواهد گذشت
و فقط یکمرتبه از این مقدار ماکزیموم میگذرد و هیچ مقداری بزرگتر از آن اختیار
نکند و مخصوصاً هرگاه ماکزیموم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ بزرگتر از صفر باشد یعنی
$4ac-b^2$ مثبت باشد ترینم بازاء دو مقدار مختلف x صفر میشود و دارای دو ریشه

حقیقی و متمایز خواهد بود

۳۲۵ — تنبیه ۱ — هرگاه میان جمیع مقادیریکه معرف اختیار کند یکی
بزرگتر از جمیع مقادیر دیگر باشد آنرا ماکزیموم مطلق آن معرف نامند
و اگر میان جمیع مقادیریکه معرف اختیار کند یکی کوچکتر از جمیع مقادیر دیگر
باشد آنرا مینیموم مطلق آن معرف گویند پس از آنچه مقدم شد چنین استنتاج
کنیم که وقتیکه a مثبت باشد ترینم بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ میرسد به مینیموم مطلق
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ و اگر a منفی باشد ترینم خواهد رسید به ماکزیموم مطلق
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ و علاوه بر این تحقیق مقدار ماکزیموم یا مینیموم از روی مسائل
ذیل بسیار سهل است

سؤال — بازاء چه مقادیری از x ترینم مفروض دارای مقدار y با
y خواهد بود

مقادیر مطلوبه عبارتند از ریشه‌های این معادله $ax^2+bx+c=y$
یا $ax^2+bx+c-y=0$ و برای اینکه معادله دارای ریشه باشد
این شرط لازمست $4ac-b^2-4a(c-y)\geqslant 0$ یا $4ay\geqslant 4ac-b^2$ میشود
پس اگر a مثبت باشد باید چنین داشت $\frac{4ac-b^2}{4a}\leqslant y$ و از اینجا معلوم

که هیچ مقداری x نتوان داد که بازاء آن مقدار ترینم کوچکتر گردد از $\frac{4ac-b^2}{4a}$ و اگر a منفی باشد باید چنین داشت $y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$ و در این حالت بدیهی است که هیچ مقداری از x یافت نشود که بازاء آن مقدار ترینم بزرگتر باشد از $\frac{4ac-b^2}{4a}$ و مخصوصاً وقتی که $y=0$ شرایط فوق چنین میشوند بازاء $a>0$ باید چنین داشت $\frac{4ac-b^2}{4a} \leqslant 0$ و بازاء $a<0$ باید $\frac{4ac-b^2}{4a} \geqslant 0$ و در هر دو حالت چنین حاصل شود $b^2-4ac \geqslant 0$

پس برای اینکه ترینم صفر گردد باید دیسکریمینان مثبت یا صفر باشد و در اینجا باز شرط حقیقت ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=y$ ظاهر است

۳۳- **تنبیه** ۲- وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند y دو مرتبه یک مقدار خواهد گذشت مرتبه اول بازاء مقادیر x کوچکتر از $-\frac{b}{2a}$ و مرتبه ثانی بازاء مقادیر x بزرگتر از $-\frac{b}{2a}$ چنانکه اگر دو مقدار متساوی البعد از $-\frac{b}{2a}$ مثلاً $-\frac{b}{2a}-\alpha$ و $-\frac{b}{2a}+\alpha$ به x داده شود ترینم دارای دو مقدار متساوی ذیل خواهد بود

$$a\left[(-\alpha)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \text{ و } a\left[(+\alpha)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

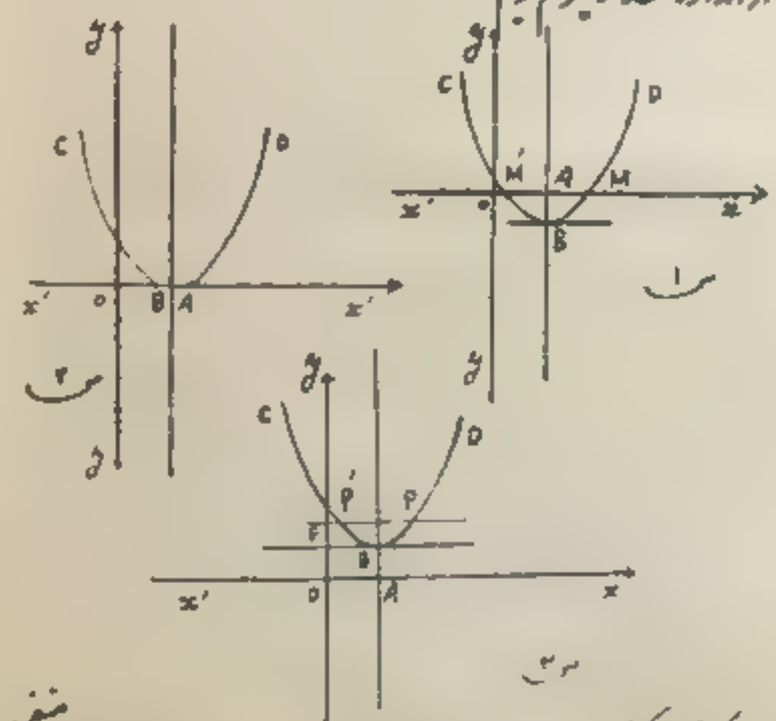
چونکه مجذور $(-\alpha)$ و $(+\alpha)$ متساویند

۳۴- نمایش هندسی تغییرات ترینم

چون x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند میتوان تغییرات ترینم درجه دویم را مانند تغییرات دو جمله $ax+b$ تشریح هندسی نمود بعبارة اخری منحنی معادله $y=ax^2+bx+c$ را رسم نمود

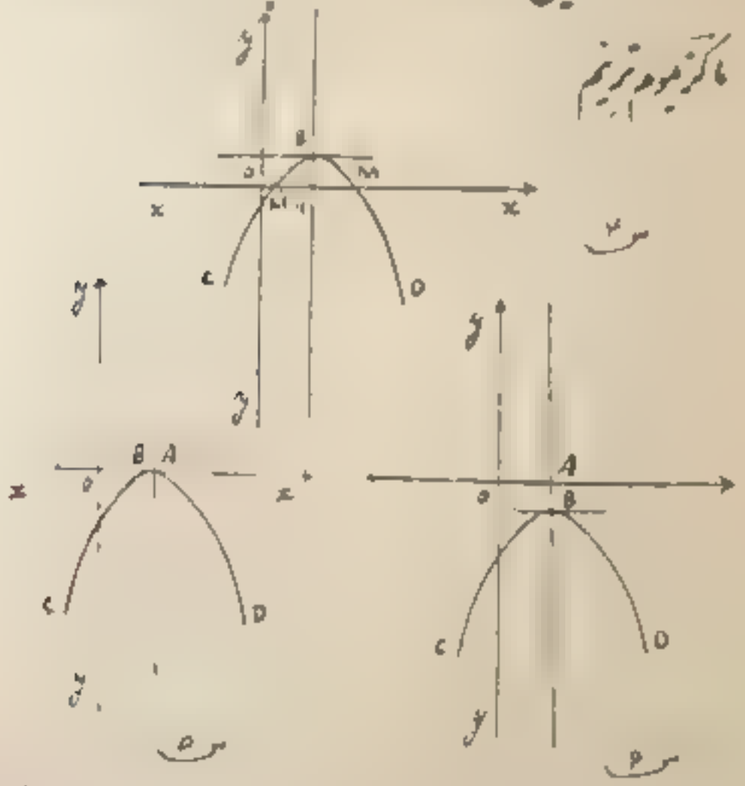
دو محور مختصات قائم xox' و yoy' را در یک سطح رسم میکنیم و x را مانند ابسیس و y را بمنزله اردونه یک نقطه از سطح منظور آوریم و بعد در روی محور xox' در جهت ox یا ox' بحسب آنکه مقدار $-\frac{b}{2a}$ مثبت یا منفی باشد طول OA را مساوی مقدار مطلق $-\frac{b}{2a}$ نقل میکنیم و از نقطه A عمودی بر xox' اخراج کنیم و طول AB را مساوی مقدار مطلق $\frac{4ac-b^2}{4a}$ در جهت oy یا oy' بحسب آنکه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ مثبت یا منفی باشد بر آن عمود نقل میکنیم و بسهولت می‌بینیم که منحنی مطلوب مرکب باشد از دو شاخه غیر محدود BC و BD که نسبت به AB قرینه اند و اگر a مثبت باشد دو شاخه منحنی بالا گرد بجهت oy و اگر a منفی باشد این دو شاخه در جهت oy' متمایل شوند چنانکه اشکال (۱) و (۲) و (۳) عبارتند از اوضاع

مختلفه منحنی در صورتیکه a را مثبت فرض کنیم و هرگاه b^2-4ac مثبت باشد منحنی قطع کند محور xx' را بر دو نقطه M و M' بطوریکه آبسیس های OM و OM' نمایش ریشه های حقیقی و متمایز x' و x'' باشند (س ۱) و اگر b^2-4ac صفر باشد منحنی مماس شود بر محور xx' در نقطه A که آبسیسش مساوی $-\frac{b}{2a}$ باشد (س ۲) و بالاخره هرگاه b^2-4ac منفی باشد منحنی قطع نکند محور xx' را (س ۳) و در این سه حالت اردونه AB عبارت باشد از اندازه مقدار مینیموم ترینم



و اگر فرض کنیم $a<0$ در این صورت قرچه منحنی مواجه شود جهت y های منفی

و آنوقت ترتیبات منحنی موافق سه شکل (۴) و (۵) و (۶) تواند بود چنانکه اگر $b^2-4ac<0$ منحنی تلاقی کند محور xx' را بر دو نقطه M و M' که آبسیس آنها عبارتند از دو ریشه x' و x'' ترینم (س ۴) و هرگاه $b^2-4ac=0$ منحنی مماس شود بر محور xx' در نقطه A که آبسیس آن $-\frac{b}{2a}$ باشد (س ۵) و بالاخره اگر $b^2-4ac>0$ در این صورت منحنی قطع نکند محور xx' را (س ۶) و در این سه حالت اردونه AB عبارتست از اندازه مقدار ماکزیموم ترینم



۳۸ — تنبیه — هرگاه ضرایب a و b و c بعدد باشند میتوان

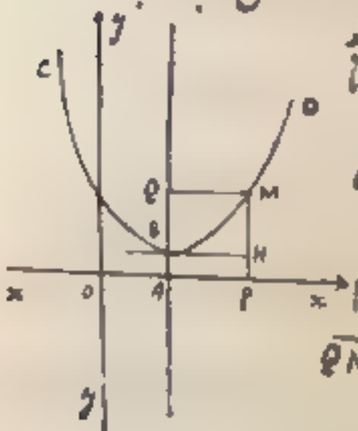
نقاط کثیری از منحنی را بدست آورد و بعد آن نقاط را بیکدیگر وصل نمود تا منحنی نمایش ترنیم تشکیل گردد پس اگر منحنی بطور صحت و دقت رسم شود به مدد آن میتوان مقادیر x را بازاء مقدار معلوم y تعیین نمود مثلاً فرض میکنیم در شکل (۱۳) فقط خط OE مساوی مقدار معلوم y را از جهت مناسب بر محور Oy نقل میکنیم و بعد از نقطه E خطی موازات Ox رسم کنیم آبسیس های نقاط تلاقی این خط با منحنی عبارتند از مقادیر مطلوبه x و اما بحسب مقدار معلوم y سه حالت ممکن است اتفاق افتد از این قرار که خط مرسوم از نقطه E موازی با Ox قطع کند منحنی را بر دو نقطه P و P' یا مماس شود با منحنی در نقطه B یا آنرا هیچ قطع نکند در حالت اول آبسیس های نقاط P و P' عبارتند از مقادیر مطلوبه x و در حالت ثانی مقادیر x برابرند با آبسیس نقطه B و در حالت ثالث برای x هیچ مقداری موجود نباشد

۳۳۹- قضیه - منحنی $y=ax^2+bx+c$ نمایش تغییرات ترنیم درجه دویم عبارتست از شکل قطع مکافی (شلجمی)

هرگاه فرض کنیم AR محور و A رأس قطع مکافی مفروض باشد در بند مقدماتی ثابت شده است که نسبت مربع عمود MQ وارد از نقطه غیر مشخص

از منحنی بر محور AR به AQ فاصله رأس منحنی از آن محور مقداریست ثابت ($\frac{\overline{MQ}^2}{AQ}$ همواره ثابت است) و بالعکس هر منحنی که دارای چنین خاصیت باشد عبارتست از قطع مکافی که به محور AR و برأس A باشد

پس از این مقدمه فرض میکنیم CBD منحنی نمایش تغییرات ترنیم $y=ax^2+bx+c$ باشد و M نقطه غیر مشخص از منحنی و x و y مختصات این نقطه باشند و بعد از نقطه M خط MP را عمود کنیم بر Ox و همچنین MQ را بر AB فرود آوریم و فرض میکنیم H نقطه تلاقی MP باشد با خط مماس در B بر منحنی پس گوئیم $\frac{\overline{MQ}^2}{BQ}$ مقداریست ثابت



برهان - هر نقطه غیر مشخص M که در روی منحنی فرض کنیم در جمیع حالات چنین خواهیم داشت $\overline{QM}=\overline{OP}-\overline{OA}=x+\frac{b}{2a}$

و $BQ=HM=PM-PH=y-\frac{4ac-b^2}{4a}$

و چون $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

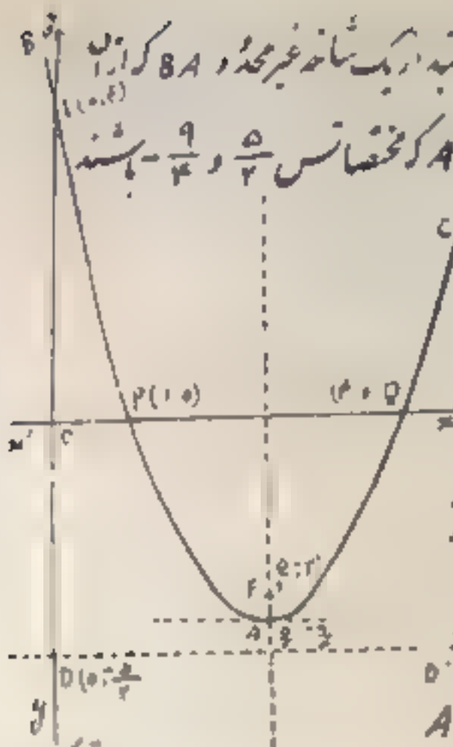
پس از اینجا $\frac{\overline{MQ}^2}{BQ}=\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{1}{a}$ و $BQ=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

نقطه M هر چه باشد مقدار a همواره ثابت است پس منحنی نمایش ترنیم عبارتست از قطع مکافی که به محور AB و به رأس A باشد

۳۴۰ - تغییرات ترنیم درجهٔ دوم وقتیکه x مابین دو عدد معلوم α و β تغییر کند غالباً فرض مسئله چنین اقتضا کند که مقدار متغیر x محصور گردد مابین حدود معینه در این صورت تغییرات ترنیم را فقط در همان حدود تعیین کنیم پس اگر α کوچکتر از β باشد ابتدا مواضع این دو عدد را نسبت به $-\frac{b}{2a}$ بدست میآوریم و این سه عدد را بحسب مقادیرشان ترتیب میدهیم و از تمام جدول کلی تغییرات ترنیم فقط فاصله مابین α و β را منظور آوریم و بحسب علامت a که مثبت یا منفی باشد دو حالت رخ دهد و از برای نمایش هندسی تغییرات مذکوره از تمام منحنی قطع مکافی فقط قوس نظیر مقادیر x را مابین α و β اختیار کنیم

مثال ۱- معلوم کنید تغییرات ترنیم $y = x^2 - 5x + 4$ را

ابتدا ترنیم را باین صورت درآوریم $y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$ چون x از $-\infty$ تا $\frac{5}{2}$ نمو کند $(x - \frac{5}{2})$ منفی است و از $-\infty$ ترقی کند تا ۰ و تا مجذورش $(x - \frac{5}{2})^2$ از $+\infty$ تا ۰ تنزل کند و y نیز از $+\infty$ تنزل کند



تا رسد به $-\frac{9}{4}$ و منحنی مرکب باشد ابتدا از یک شاخه غیر محدود BA که از این غیرانهایت نزول کند تا رسد به نقطه A که مختصاتش $\frac{5}{2}$ و $-\frac{9}{4}$ باشند و چون x از $\frac{5}{2}$ تا $+\infty$ نمو کند $(x - \frac{5}{2})$ مثبت است و از ۰ تا $+\infty$ ترقی کند و مجذورش نیز از ۰ تا $+\infty$ ترقی میکند و y از $-\frac{9}{4}$ ترقی کند تا رسد به $+\infty$ پس شاخهٔ دیگر منحنی AC ابتدا از A بی نهایت صعود کند و باز از $x = 0$ چنین حاصل شود $y = 4$ پس منحنی قطع کند محور yy' را در نقطه I که مختصاتش ۰ و ۴ باشند و y باز از $x = 1$ و $x = 4$ صفر میشود پس منحنی قطع کند محور x را در دو نقطه P(۱ و ۰) و (۴ و ۰) و چون ترنیم باین صورت نوشته شود $(y + \frac{9}{4}) = (x + 2)^2 + (\frac{5}{2} - 2)^2$ از اینجا ظاهر است که کانون منحنی نقطه F است مختصات $\frac{5}{2}$ و -2 و خط هادی آن عبارتست از DD که معادلهٔ اش اینست $y = -\frac{5}{2}$

خلاصه بحث های فوق در جدول ذیل نموده شده است

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$\frac{9}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

امتحان متعلق بفصل چهاردهم

۱ـ ترنیم های ذیل را بحاصل ضرب دو عامل درجه اول تجزیه کنید

$12x^2-x-1$ و x^2-4x+1 و $5x^2+8x-9$

$3x^2-12x+5$ و $(1-x)^2+(x+2)^2-(x^2+1)$

$-2x^2-3x+5$ و $R^2-\left[x^2+2\left(\frac{R-x}{2}\right)^2\right]$

۲ـ مواضع اعداد ۳ و ۵ و ۱ـ را نسبت به ریشه های معادلات ذیل معلوم کنید

$x^2+3x-2=0$ و $2x^2+7x-1=0$ و $x^2-4x+2=0$

۳ ریشه های معادلات ذیل را نسبت به اعداد ۱ و ۲ مرتب کنید

$x^2-2(\lambda+3)x+4=0$ و $x^2-(\lambda+4)x+4-\lambda=0$

$\lambda x^2-2(\lambda+1)x+\lambda-1=0$ و $x^2-4(\lambda+1)x-\lambda=0$

۴ـ مقدار λ را چنان معلوم کنید که ریشه های معادلات ذیل واقع شده باشند مابین ۱ و ۲

$(\lambda-3)x^2-(2\lambda+1)x-4=0$ و $(\lambda^2-1)x^2-2(\lambda-1)x+\lambda=0$

۵ـ مابین چه حدودی باید مقدار x را تغییر داد برای اینکه مقدار ترنیم

x^2-2x-4 مثبت باشد یا اینکه منفی

۶ـ مقدار λ را چگونه باید اختیار نمود تا اینکه یکی از ریشه های معادله ذیل

$3x^2+(\lambda-1)x+3\lambda+2=0$ بزرگتر از ۳ باشد و دیگری کوچکتر از ۲

۷ـ ثابت کنید که هرگاه a و b و c اضلاع مثلث باشند ترنیم درجه دوم

$b^2c^2+x(a^2-c^2+b^2)+x^2a^2$ همواره مثبت است هر چه باشد x

۸ـ معلوم کنید باز از چه مقادیری از λ معادله ذیل دارای ریشه خواهد بود

و پس از تحدید λ علامات ریشه را بحسب مقادیر مختلفه λ تعیین کنید

$$\lambda x^2+2(\lambda+1)x+\lambda-1=0$$

۹ـ در معادله $5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0$

هر مقداری از x نظیر است به دو مقدار از y و هم چنین هر مقداری از y نظیر است

به دو مقدار از x معلوم کنید اولاً مابین چه حدودی باید x را تغییر داد تا آنکه

مقادیر نظایر y حقیقی گردند ثانیاً مابین چه حدودی باید y را اختیار نمود تا

آنکه مقادیر نظایر x حقیقی باشند

جواب ـ مقدار x باید کوچکتر باشد از ۵ یا بزرگتر از ۷ و مقدار y کوچکتر شود

از $\frac{19-\sqrt{5}}{2}$ یا بزرگتر از $\frac{19+\sqrt{5}}{2}$ و همین سؤالات را در معادلات ذیل

معمولی دارید $4x^2-6xy+5y^2-3x+4y=0$

$$9x^2+12xy+5y^2-30y-20y+26=0$$

$$x^2+12xy+4y^2+4x+8y+20=0$$

$$5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0$$

۱۰ـ نامساویهای ذیل را حل کنید $x^2-7x+6<0$

$$x(x^2-1)(x^2-3x+2)(x^2+5x+7)>0$$

$$x(x^3-3x+2)(x^3-3x^2+2)<0$$

$$\frac{2x+3}{x-1}<\frac{x+5}{x+1}\ ,\ \frac{x-5}{x}>\frac{2x+3}{x-4}$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1\ ,\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x-6}>\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x+2}$$

۱۱ـ مقدار λ را چنان تعیین کنید که هرچه باشد x چنین داشته باشیم

$$\frac{5x^2+4x+4}{x^2+x+1}<\lambda\ ,\ \frac{4x^2+2\lambda x+\lambda}{4x^2+6x+3}<1$$

۱۲ـ معلوم کنید که مابین چه حدودی باید x را تغییر داد تا آنکه کسور ذیل بزرگتر باشند از ۱ یا کوچکتر شوند از ۱

$$\frac{4x^2-5x-1}{25x^2-5x+3}\ ,\ \frac{4x^2-43x+8}{5x^2-7x+2}\ ,\ \frac{x^2-7x+12}{3(x^2-11x+18)}$$

۱۳ـ تغییرات ترینم های ذیل را معلوم کنید و نمایشات هندسی آنها را نیز رسم نمائید

x^2+x+1 ، $4x^2-x-4$ ، $-4x^2+7x+6$ ، $2x^2-4x+7$

$5x^2+6x-3$ ، $4x^2-20x+25$ ، $2+8x-3x^2$ ، $2x^2-x+1$

۱۴ـ بازاء مقادیر x محصور در این اوساط تغییرات ترینم های ذیل را معلوم کنید

mx^2-mx+2 ، $5x^2-3x+m$ ، $(m-1)x^2-5x+4$

۱۵ـ تغییرات عبارت $5m^2x^2-3mx+4$ را معلوم کنید وقتی که x از ۱ تا ۲ ترقی کند

۱۶ـ مقدار λ را چنان معین کنید که منحنی $y=x^2-x+\lambda$ مماس شود بر محور ox

۱۷ـ معادله خط مماس بر منحنی $y=x^2-3x$ را در مبدء مختصات معلوم کنید

۱۸ـ کانون منحنی قطع مکافی $y=2x^2-x+1$ را معلوم کنید

۱۹ـ مقدار λ را چنان مشخص کنید که کسور $\frac{x-\lambda}{x^2-3x+2}$ و $\frac{x^2-\lambda x+1}{x^2-5x+6}$ جمیع مقادیر ممکنه را اختیار کنند

۲۰ـ مقدار λ و μ را طوری مشخص کنید که $\frac{2\lambda x+\mu}{x^2+x+1}$ دائماً واقع باشد مابین ۳ و ۴

۲۱ـ بر کاه نیم دایره AMB در حول قطر ثابت AB دوران کند معلوم کنید تغییرات مجموع حجم های حادثه از قطعات ADM و MEB وقتیکه نقطه M در روی محیط نیم دایره سیر کند

۲۲ـ تغییرات $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ را معلوم کنید و شکل منحنی آنرا بحسب آنکه b^2-4ac

مثبت یا صفر یا منفی باشد بیابید و مخصوصاً منحنیات معرفات ذیل را رسم کنید

$y=\frac{1}{x^2-8x+7}$ ، $y=\frac{1}{x^2-4x+4}$ ، $y=\frac{1}{x^2-6x+13}$

۲۳ - ثابت کنید که ریشه‌های معادله ذیل حقیقی هستند هر چه باشد اعداد m و n و p و q

$$(1+p^2+q^2)x^2+[(m+n)(1+q^2)-2p(1+p^2)-2q(1+p^2)]x+(m^2-n^2)=0$$

و علاوه بر این ثابت کنید برای اینکه این معادله دارای دو ریشه متساوی باشد لازم و کافیست که اعداد معلومه در رابطه ذیل صدق کنند $\frac{m}{1+p^2}=\frac{n}{1+q^2}=\frac{p}{pq}$

۲۴ - هرگاه بر خط TT مماس بر دایره که بشعاع r باشد دو نقطه A و B اختیار کنیم بطوریکه فاصله AB مساوی $2r$ باشد و در سطح دایره در طرفیکه TT واقع شده نقطه C فرض کنیم که فاصله‌اش از مماس TT برابر h باشد و خطی بموازات TT رسم کنیم تا دایره را در دو نقطه M و N قطع کند و همچنین دو خط CA و CB را نیز در نقاط P و Q تلاقی کند اولاً تغییرات مجموع $\overline{NM}^2+\overline{PQ}^2$ را پیروی کنید وقتیکه فاصله قاطع MN از مماس از 0 تا $2r$ تغییر کند و معلوم کنید که این مجموع چند مرتبه مرور کند بر مقدار معلوم K^2 و منحنیات آنها را رسم کنید ثانیاً فاصله قاطع را از مماس تعیین کنید بطوریکه مجموع $\overline{MN}^2+\overline{PQ}^2$ مساوی شود به K^2 و در این مسئله بحث کنید و مطابقت نتایج این بحث جدید را با نتایج مسابقه تحقیق کنید

فصل پانزدهم

معادلات قابل تبدیل بدرجه دوم

۱ـ معادله دو مجذوری

۲۴۱ - معادله دو مجذوری عبارتست از هر معادله‌ای که پس از اختصارات لازمه و نقل جمیع اجزاء بیک طرف آن شامل قوای زوج مجهول باشد و بموجب این تعریف معادله دو مجذوری را همواره میتوان بصورت کلی ذیل درآورد

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (1)$$

a و b و c عبارتند از مقادیر معلومه

و حل این معادله را میتوان راجع کرد به حل معادله درجه دوم از اینقرار ابتدا x^2 را مجهول فرض کرده چنین قرار دهیم $y=x^2$ (۲) و چون در معادله مفروضه x^2 را تبدیل کنیم به y معادله درجه دوم ذیل تشکیل میشود

$$ay^2+by+c=0 \qquad (3)$$

و این معادله را **معادله مفروضه** نامند

هرگاه این معادله (۳) دارای دو ریشه y_1 و y_2 باشد آنها را متناظر با y در معادله (۲) قرار میدهیم پس ریشه‌های معادله (۱) عبارت خواهند از ریشه‌های

دو معادله ذیل $x^2 = y'$ و $x^2 = y''$

چنانکه هر مقدار حقیقی و مثبت y نظیر کرده بدو مقدار حقیقی متساوی و مختلف العلامه از x و هر مقدار حقیقی و منفی از y نظیر هیچ مقدار حقیقی از x نخواهد بود چون که در آنصورت معادله $x^2 = y'$ یا $x^2 = y''$ محال میشود و بالاخره هرگاه معادله محلل دارای ریشه نباشد معادله مفروضه نیز ریشه نخواهد داشت

۳۴۲ — بحث در معادله دو مجذوری — از روی بیانات فوق چنین نتیجه شود اولاً هرگاه معادله محلل (۳) دارای دو ریشه حقیقی و مثبت باشد یعنی هرگاه $\frac{b}{a} < 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $b^2 - 4ac > 0$ در این صورت معادله (۱) دارای چهار ریشه خواهد بود که دو بدو متساوی و مختلف العلامه باشند و علاوه بر این چنین این ریشه‌ها را بآسانی بدست آورد زیرا که چون معادله محلل را حل کنیم دو ریشه آن چنین شود $y' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $y'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و چون مقادیر x نظیر y' را به x'_1 و x'_2 بنامیم و همچنین مقادیر نظایر y'' را به x''_1 و x''_2 چنین خواهیم داشت

$$x'_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x'_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (۴)$$

$$x''_2 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad x''_1 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

و این چهار مقدار را می‌توان بیک فرمول نمود

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (۵)$$

ثانیاً هرگاه معادله محلل دارای دو ریشه حقیقی و منفی باشد یعنی اگر یکی از $b^2 - 4ac > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{b}{a} > 0$ در اینصورت معادله (۱) ریشه نخواهد داشت

ثالثاً اگر محلل دارای دو ریشه حقیقی و مختلف العلامه باشد یعنی $\frac{c}{a} < 0$ در اینحالت معادله (۱) دارای دو ریشه حقیقی و متساوی و مختلف العلامه باشد نظیر ریشه مثبت محلل و این دو ریشه حقیقی عبارتند از مقادیر ذیل x'_1 و x'_2

$$x'_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{و} \quad x'_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

رابعاً هرگاه معادله محلل دارای ریشه‌های متساوی و مثبت باشد یعنی $\frac{b}{a} < 0$ و $b^2 - 4ac = 0$ در این صورت معادله (۱) دارای یک ریشه مضاعف مثبت خواهد بود $x'_1 = x'_2$ و یک ریشه مضاعف منفی $x''_1 = x''_2$ که بحسب مقدار مطلق برابر باشد با ریشه مضاعف مثبت از این قرار $x'_1 = x'_2 = +\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و $x''_1 = x''_2 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ خامساً هرگاه ریشه‌های محلل متساوی و منفی باشند یعنی $b^2 - 4ac = 0$ و $\frac{b}{a} > 0$ در این حالت معادله (۱) ریشه نخواهد داشت

مساوساً بالاخره هرگاه محلل دارای ریشه نباشد معادله دو مجذوری ریشه نخواهد داشت

خلاصه بحث فوق را در جدول ذیل آوردیم

- $b^2-4ac>0$
  - $\frac{c}{a}>0$
    - $\frac{b}{a}<0$ چهار ریشه دو بدو متساوی و مختلف العلامه
    - $\frac{b}{a}>0$ هیچ ریشه نیست
  - $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه متساوی و مختلف العلامه
  - $\frac{c}{a}=0$
    - $\frac{b}{a}<0$ یک ریشه مضاعف صفر و دو ریشه متساوی و مختلف العلامه
    - $\frac{b}{a}>0$ یک ریشه مضاعف صفر
- $b^2-4ac=0$
  - $\frac{b}{a}<0$ چهار ریشه حقیقی که دو ریشه متساوی $\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و دو ریشه دیگر متساوی $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$
  - $\frac{b}{a}>0$ هیچ ریشه نیست
  - $\frac{b}{a}=0$ چهار ریشه صفر
- $b^2-4ac<0$ معادله هیچ ریشه نخواهد داشت

و در قواعد محاسبات اعداد موهومی خواهیم دید که معادله دو مجذوری همواره دارای چهار ریشه حقیقی است یا موهومی که دو بدو مزدوج باشند

مثال ۱- معادله ذیل را حل کنید $x^4-13x^2+36=0$

چنین خواهیم داشت $y=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm5}{2}$

پس y دارای دو مقدار حقیقی و مثبت ۴ و ۹ باشد و از آنجا چهار مقدار حقیقی ذیل برای x حاصل شود $x=\pm2$ و $x=\pm3$

مثال ۲- حل کنید این معادله را $x^4+13x^2+36=0$ ریشه‌های آن عبارتند از دو مقدار منفی ۴- و ۹- پس برای x هیچ مقداری نخواهد بود

مثال ۳- این معادله را حل کنید $x^4-5x^2+36=0$

برای y دو مقدار حقیقی ۹ و ۴- بدست آید و مقدار مثبت ۹ نظیر گردد به دو مقدار حقیقی متساوی و مختلف العلامه از x یعنی $x=\pm3$ و اما مقدار منفی ۴- نظیر هیچ مقداری از x نباشد

مثال ۴- این معادله را حل کنید $x^4-6x^2+10=0$

چون محلل شامل ریشه نیست پس معادله مفروضه نیز هیچ ریشه قبول نکند

مثال ۵- جنس ریشه‌های معادلات ذیل را یک نظر بدون حل آنها معلوم کنید

(۱) $3x^4-14x^2+5=0$ (۲) $5x^4+12x^2+4=0$

(۳) $3x^4+7x^2-8=0$ (۴) $4x^4-6x^2+3=0$

مقادیر یکه بجای x^2 در معادله (۱) صدق میکنند حقیقی و مثبت اند زیرا که $\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ مثبت باشند پس معادله (۱) دارای ۴ ریشه حقیقی است

مقادیریکه بجای x^2 در معادله (۲) صدق میکنند حقیقی و منفی باشند چونکه دیسکریمینان $\frac{c}{a}$ مثبت و $\frac{b}{a}$ منفی است پس معادله مفروضه بازاء هیچ مقداری از x محقق نباشد

مقادیریکه بجای x^2 در معادله (۳) صدق میکنند حقیقی و مختلف العلامه اند چونکه $\frac{c}{a}$ منفی است پس فقط دو مقدار از x در معادله (۳) صدق کنند

بالاخره هیچ مقداری بجای x^2 در معادله (۴) صدق نمیکند چونکه دیسکریمینان منفی است پس معادله (۴) بازاء هیچ مقداری از x محقق نباشد

مثال ۵- فرض میکنیم این معادله را $x^4-2mx^2+9=0$ دیسکریمینان معادله محلل عبارتست از $9-m^2$ پس هرگاه m واقع شود بین -3 و $+3$ معادله ریشه نخواهد داشت و اگر m کوچکتر از -3 باشد ریشه های محلل منفی خواهد بود و آنوقت معادله مفروضه هیچ ریشه قبول نکند و بالاخره اگر m بزرگتر از 3 باشد معادله دارای ۴ ریشه باشد و محلل دو ریشه مثبت قبول کند

۲- تبدیل عباراتیکه بشکل $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ باشند

۳۴۳- وقتیکه ریشه های دو مجذوری حقیقی و متمایز باشند سابق دیدیم که عبارت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ نموده میشوند چنانکه $A\pm\sqrt{B}$ و B اعداد مثبت باشند

واگر B مجذور کامل نباشد مقادیر ریشه را بتقریب معنی خوب بدست نیاورند ولیکن بعضی اوقات چنانچه ممکن باشد میتوان باعانت مسئله حسابی ذیل عبارت فوق را تبدیل نمود به مجموع یا تفاضل دو رادیکال بسیط

مسئله- هرگاه A و B دو عدد مثبت و منطق باشند و B مجذور کامل نباشد میتوان دو عدد مثبت و منطق x و y اگر ممکن باشد بدست آورد که در این رابطه ذیل صادق آیند $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

فرض میکنیم مقصود تبدیل $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ باشد و این رابطه را قرار میدهیم

$$(1)\quad \sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

چون طرفین این معادله را مجذور کنیم هیچ ریشه خارجی در آن داخل نمیشود زیرا که هر دو طرف مثبت اند و این معادله جدید حاصل شود

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy} \quad \text{یا} \quad A-x-y+\sqrt{B}=2\sqrt{xy} \quad (2)$$

و چون مجدداً معادله (۲) را مجذور کنیم چنین نتیجه میشود

$$(A-x-y)^2+2(A-x-y)\sqrt{B}+B=4xy$$

$$\text{و یا} \quad (A-x-y)^2+B-4xy=2(x+y-A)\sqrt{B} \quad (3)$$

و چون طرف اول این معادله بنابفرض باید منطق باشد پس طرف ثانی نیز

با تفرد و منفق خواهد بود ولی عامل $\sqrt{B}$ بنا بفرض اخیر است و عامل $(x+y-A)$ منفق پس شرط اینکه حاصل ضرب این دو عامل منفق باشد آنست که عامل $(x+y-A)$ مساوی صفر گردد پس از معادله (۳) چنین استخراج شود $A=x+y$ و $xy=\frac{B}{4}$ و بنابراین اگر مسئله ممکن باشد x و y ریشه‌های منفق معادله درجه دوم ذیل خواهد بود

$$Z^2-AZ+\frac{B}{4}=0$$

و از آنجا $Z=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}$ و مقادیر x و y چنین شوند

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \quad \text{و} \quad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

و از آنجا این دستور تشکیل گردد

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

و چون A^2-B مجذور کامل است چنین قرار دهیم $A^2-B=C^2$

و از آنجا

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

برای اینکه این ریشه‌ها حقیقی باشند باید A^2-B مثبت باشد و برای اینکه ریشه‌ها مثبت باشند باید A نیز مثبت باشد و بالاخره برای اینکه این ریشه‌ها منفق باشند باید A^2-B مجذور کامل باشد و بطور کلی شرط لازم و کافی برای امکان مسئله آنست که A مثبت و A^2-B مجذور کامل باشد

و موافق همان شرایط مذکوره فوق میتوان عبارت $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ را تبدیل

نمود به $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ و چنین حاصل نمود

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

۳۴۴- **تنبیه** — باید این نکته را متذکر بود که اولاً هرگاه منفق بودن x و y قید نشود معادله (۱) میتواند اجوبه بیشمار اختیار کند ثانیاً ممکن نیست دو عدد مثبت و منفق x و y بدست آورد که در روابط ذیل صدق کنند $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ یا $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

مثال- عبارت $\sqrt{6\pm\sqrt{11}}$ را تبدیل کنید

چون $A=6$ و $B=11$ و $A^2-B=36-11=25=5^2$ پس حاصل میشود

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{6+5}{2}}+\sqrt{\frac{6-5}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}+1)$$

$$\sqrt{6-\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}-1)$$

مثال۲- عبارت ذیل را تبدیل کنید $\sqrt{7\pm2\sqrt{10}}$

چون $2\sqrt{10}=\sqrt{40}$ پس $A=7$ و $B=40$ و $A^2-B=3^2$

و از آنجا $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{7+3}{2}}+\sqrt{\frac{7-3}{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

و $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

مثال۳- ریشه‌های معادله دو مجذور کلی را اگر ممکن باشد تبدیل کنید

این ریشه‌ها بعبارت $\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ نموده شوند

یا $\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}$ و چون $A=-\frac{b}{2a}$

$A^2-B=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$, $B=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,

پس اگر A و B و A^2-B مثبت باشند یعنی $-\frac{b}{a}$ و b^2-4ac

و $\frac{c}{a}$ مثبت باشند میتوان ریشه‌های معادله دو مجذوری را باین صورت داد

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}}}\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{c}{a}}}\right)$$

ولیکن این تبدیل حقیقتاً مفید نخواهد بود مگر وقتیکه $\frac{c}{a}$ یا ac مجذور کامل باشد

مثال ۴ - این معادله را حل کنید $x^4-18x^2+16=0$

حاصل ضرب $ac=16$ چون مجذور ۴ است پس میتوان ریشه‌های

$Z^2-9Z+\frac{65}{4}=0$ را تبدیل نموده $\pm\sqrt{9\pm\sqrt{65}}$

و از آنجا $Z=\frac{9\pm4}{2}$ و ریشه‌های مطلوب بعبارت ذیل نموده شوند

$x=\frac{9+4}{2}=\frac{13}{2}$, $y=\frac{9-4}{2}=\frac{5}{2}$ $\quad\pm\left[\sqrt{\frac{13}{2}}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$

مثال ۵ - ریشه‌های معادله $18x^4-45x^2+2=0$ را تبدیل کنید

$$x=\pm\left[\sqrt{\frac{45}{72}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}}\pm\sqrt{\frac{45}{72}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}}\right]=$$

$$=\pm\frac{\sqrt{57}\pm\sqrt{33}}{6\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{57}\pm\sqrt{33}\right)$$

۳ - تجزیه ترینم دو مجذوری بعاملهای درجه دوم

۳۴۵ - قضیه — ترینم دو مجذوری ax^4+bx^2+c را میتوان همواره تجزیه نمود بحاصل ضرب دو عامل درجه دوم

ابتدا فرض میکنیم معادله محلل ay^2+by+c دارای دو ریشه مثبت یا منفی y' و y'' باشد پس چنین قرار میدهیم

$$ay^2+by+c=a(y-y')(y-y'')$$

و چون $y=x^2$ پس ترینم دو مجذوری بصورت حاصل ضرب دو عامل درجه دوم درآید $ax^4+bx^2+c=a(x^2-y')(x^2-y'')$ (۱)

وقتیکه ترینم دارای چهار ریشه باشد y' و y'' مثبت میگردند و آنوقت معادله (۱) را میتوان چنین نوشت

$$ax^4+bx^2+c=a(x-\sqrt{y'})(x+\sqrt{y'})(x-\sqrt{y''})(x+\sqrt{y''})$$

و اگر ترینم دارای دو ریشه باشد فقط یک ریشه از محلل مثلاً y' مثبت میگردد و آنوقت معادله (۱) را می‌توان چنین قرار داد

$$ax^4+bx^2+c=a(x-\sqrt{y'})(x+\sqrt{y'})(x^2-\sqrt{y''})$$

و حال فرض میکنیم معادله محلل $ay^2+by+c=0$ دارای ریشه نباشد و

قرار دهیم $q=\frac{c}{a}$ و $p=\frac{b}{a}$ $\quad q<0$ و $q-\frac{p^2}{4}<0$ و ترنیم دو مجذوری باین صورت درآید $ax^4+bx^2+c\equiv a(x^4+px^2+q)$

ضریب q چون مثبت است میتوان x^4 و q را بمنزله دو جمله طرفین بسط $(x^2\pm\sqrt{q})^2$ منظور داشت پس معادله باین صورت درآید

$$ax^4+bx^2+c\equiv a\left[(x^2+\sqrt{q})^2-(2\sqrt{q}-p)x^2\right]$$

$$ax^4+bx^2+c\equiv a\left[(x^2-\sqrt{q})^2-(-2\sqrt{q}-p)x^2\right]$$

و چون $q-\frac{p^2}{4}$ منفی است و $2\sqrt{q}$ بزرگتر است از مقدار مطلق p پس $2\sqrt{q}-p$ قطعاً مثبت خواهد بود و از دو این تساوی فوق چنین حاصل شود

$$ax^4+bx^2+c\equiv a\left[(x^2+\sqrt{q})^2-\left(x\sqrt{2\sqrt{q}-p}\right)^2\right]\equiv$$

$$a\left[x^2+x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right]\left[x^2-x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right]$$

و باید دانست که این تساوی فوق محقق و مقرر است وقتیکه معادله دو مجذوری دارای ۴ ریشه حقیقی باشد یعنی $q<0$ و $p<0$ و $q-\frac{p^2}{4}<0$ و وسیله جدیدی برای حل معادله دو مجذوری بدست آید چنانکه کافیست که دو معادله درجه دوم ذیل را علاحده حل کنیم

$$x^2+x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}=0 \quad , \quad x^2-x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}=0$$

و از آنجا $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{q}-p}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{q}-p}$

امثله در تجزیه ترنیم دو مجذوری

$$3x^4-7x^2+4=3(x^2-1)(x^2-\tfrac{4}{3})$$

$$x^4+x^2+1\equiv(x^2+1)^2-x^2\equiv(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$9x^4-3x^2+4\equiv 9(x^2+x+\tfrac{2}{3})(x-x+\tfrac{2}{3})$$

$$x^4+1\equiv(x^2+1)^2-2x^2\equiv(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

۴- تغییرات ترنیم دو مجذوری

۲۴۶ ترنیم دو مجذوری ax^4+bx^2+c معرفیت اتصالی از x بازاء جمیع مقادیر x از $-\infty$ تا $+\infty$ یعنی بر مقدار معین و محدودی از x نظیر باشد بیک مقدار معین و محدودی از ترنیم فرض میکنیم y_0 مقدار معینی از ترنیم نظیر مقدار معین x_0 از x باشد و همچنین y_1 نظیر مقدار دیگر x_0+h از x پس دو تساوی ذیل را قرار میدهیم

$$y_1=a(x_0+h)^4+b(x_0+h)^2+c$$

$$y_0=ax_0^4+bx_0^2+c$$

مقصود از اینکه ترنیم دو مجذوری معرفیت اتصالی از x بازاء x_0

آنگاه اگر قبلاً فرض کنیم ε عددی باشد مثبت و بی نهایت کوچکتر بتوان
عدد مثبت دیگر α بی نهایت کوچکتر بدست آورد چنانکه بازاء جمیع مقادیر
h که در نامساوی مضاعف $-\alpha < x_0 + h < +\alpha$ صدق میکنند
این نامساوی نیز محقق باشد $-\varepsilon < y - y_0 < +\varepsilon$ یا اینکه از
نامساوی $-\alpha < h < +\alpha$ این نامساوی نتیجه شود $-\varepsilon < y - y_0 < +\varepsilon$
برهان چون دو تساوی فوق را از یکدیگر نقصان کنیم پس از اختصار چنین میشود

$$y - y_0 = h\left(4ax_0^3 + 6ax_0^2h + 4ax_0h^2 + ah^3 + 2bx_0 + bh\right)$$

فرض میکنیم h واقع باشد مابین -1 و $+1$ پس مقدار مطلق مجموع
$4ax_0^3 + 6ax_0^2h + 4ax_0h^2 + ah^3 + 2bx_0 + bh$ کمتر شود از مجموع مقادیر
مطلقه شش عدد ذیل $4a|x_0^3|$ و $6a|x_0^2|$ و $4a|x_0|$ و a و $2b|x_0|$ و b و چون
مجموع این مقادیر مطلقه را به M بنامیم مقدار مطلق $y - y_0$ کوچکتر شود از مقدار
مطلق Mh و بعد عدد معلوم ε را آنقدر کوچک فرض میکنیم که $\frac{\varepsilon}{M} < 1$
و چنین قرار میدهیم $\alpha = \frac{\varepsilon}{M}$ و بنابراین بازاء هر مقداری از h محصور مابین
$-\alpha$ و $+\alpha$ و بطریق اولی مابین -1 و $+1$ مقدار Mh واقع گردد مابین
$-M \times \frac{\varepsilon}{M}$ و $+M \times \frac{\varepsilon}{M}$ یعنی مابین $-\varepsilon$ و $+\varepsilon$ و در این صورت چنین

خواهیم داشت $-\varepsilon < (y - y_0) < +\varepsilon$ پس از اینجا ثابت میشود که متعرف y
اتصالی است

۳۴۷ - جهت تغییرات ترنیم $y = ax^4 + bx^2 + c$

برای تعیین جهت تغییرات ترنیم دو مجذوری y وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$
متزاید باشد ترنیم را بصورت کلی ذیل در آوردیم

$$y = ax^4 + bx^2 + c = a\left[x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right] =$$
$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

می بینیم که ترنیم y مرکبست از حاصل ضرب a در مجموع دو مقدار که یکی
$\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ ثابت است و دیگری $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ متغیر پس برای تعیین
جهت تغییرات y کافیست که تغییرات $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ را معلوم کنیم و y در جهت
$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ یا در جهت مخالف تغییر کند بحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد
و چون عبارت $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ نیز در جهت $x^2 + \frac{b}{2a}$ یا در جهت مخالف تغییر میکند
بحسب آنکه $x^2 + \frac{b}{2a}$ مثبت یا منفی باشد پس از اینجا دو حالت منظور شود بحسب آنکه
$x^2 + \frac{b}{2a}$ بتواند صفر گردد یا اینکه دائماً مثبت باشد یعنی $\frac{b}{2a}$ مثبت یا منفی باشد
اولاً $\frac{b}{2a} < 0$ پس $x^2 + \frac{b}{2a}$ همواره مثبت است و چون x از $-\infty$ -

تا ۰ ترقی کند $x^2+\frac{b}{2a}$ از $-\infty$ تنزل کند و برسد به $\frac{b}{2a}$ و مجذورش $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ نیز در همان جهت از $-\infty$ تنزل کرده میرسد به $\frac{b^2}{4a^2}$ و چون x از ۰ ترقی کند و برسد به $+\infty$ مقدار $x^2+\frac{b}{2a}$ از $\frac{b}{2a}$ ترقی کرده میرسد به $+\infty$ و آنوقت $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ نیز از $\frac{b^2}{4a^2}$ ترقی کند و برسد به $+\infty$ پس هرگاه a مثبت باشد y در جهت $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ تغییر خواهد نمود و بازاء $x=0$ میرسد بمقدار مینیموم c و اگر a منفی باشد y در جهت مخالف $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ تغییر کند و بازاء $x=0$ میرسد به مقدار ماکزیموم c خلاصه بحث فوق در جدول ذیل نموده شده است

(هر علامت ترقی است و ↘ علامت تنزل است)

	x	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$
	$x^2+\frac{b}{2a}$	$+\infty$	↘	$\frac{b}{2a}$	↗ $+\infty$
$\frac{b}{2a}>0$	$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	↘	$\frac{b^2}{4a^2}$	↗ $+\infty$
	$a>0$ y	$+\infty$	↘	c مینیموم	↗ $+\infty$
	$a<0$ y	$-\infty$	↗	c ماکزیموم	↘ $-\infty$

و باید دانست که هرگاه $y=0$ ترنیم y موافق حالت فوق تغییر کند ثانیاً $\frac{b}{2a}<0$ در این حالت $x^2+\frac{b}{2a}$ بازاء دو ریشه $x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}$

صفر میشود و بازاء هر مقداری از x واقع مابین دو ریشه $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و $+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ منفی است ولیکن بازاء مقادیر x واقع در خارج این دو ریشه مثبت باشد و چون x از $-\infty$ تا $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ترقی کند $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)$ و مجذورش $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ هر دو در یک جهت تغییر کنند و چون x از $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ تا $+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ نمو نماید $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ در جهت مخالف $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)$ تغییر خواهد نمود و بالاخره چون x از $+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ تا $+\infty$ ترقی کند $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)$ و مجذورش باز در یک جهت تغییر پذیرند و علاوه بر این چون مقدار $x^2+\frac{b}{2a}$ بازاء $x=0$ دارای یک مینیموم است پس جهت تغییرات ترنیم y خوب معلوم میگردد

پس از آنچه مقدم شد چنین نتیجه میشود که اگر a مثبت باشد در همان فواصلیکه $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ صعودی یا نزولی است y نیز صعودی یا نزولی خواهد بود و اگر a منفی باشد در فواصلیکه $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ صعودی یا نزولی باشد بالعکس y نزولی یا صعودی است و بازاء $x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ معرف y دارای دو مقدار متساوی مینیموم یا ماکزیموم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ میگردد بحسب a مثبت یا منفی باشد

خلاصه بحث های فوق در جدول ذیل مندرج است

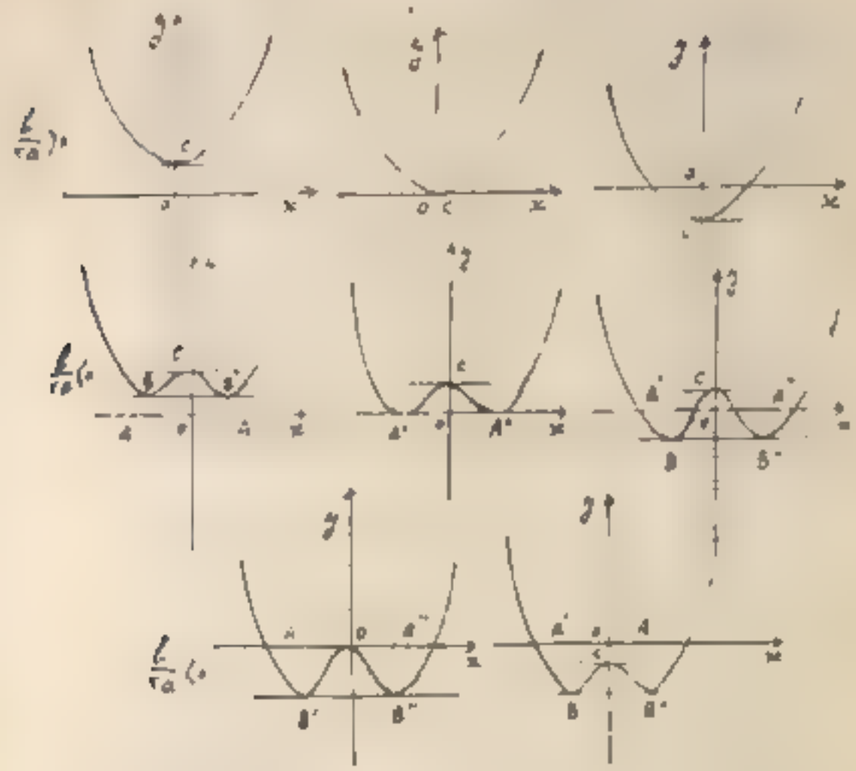
$\frac{b}{2a}<0$	x	$-\infty$ ↗	$\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ↗	0 ↗	$+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ↗	$+\infty$
	$x^2+\frac{b}{2a}$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$\frac{-b}{2a}$ ↗	0 ↗	$+\infty$
	$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$ ↘	0 ↗	$\frac{b^2}{4a^2}$ ↘	0 ↗	$+\infty$
	$a>0$ y	$+\infty$ ↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ ↗	۳ برابر ↘	$\frac{-b^2}{4a}$ ↗	$+\infty$
	$a<0$ y	$-\infty$ ↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ ↘	۳ برابر ↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ ↘	$-\infty$

۳۴۸ - نمایش هندسی تغییرات ترنیم دو مجذوری

در یک دستگاه دو محور قائم مختصات رسم کنیم و x و y را بمنزلهٔ ابسیس و اردوآ یک نقطه از سطح منظور داریم میتوان مانند جمله $y=ax+b$ و سه جمله $y=ax^2+bx+c$ و جمله دویم $y=ax^2+c$ تغییرات سه جمله دو مجذوری $y=ax^2+bx+c$ را به منحنی نمود در صورتیکه دو حالت عمده منظور آوریم بحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد و چنین اختیار میکنیم $\overline{OA''}=+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و $\overline{OA'}=\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و چنانچه $\frac{b}{2a}$ منفی باشد و $\overline{OC}=c$ و $\overline{A'B'}=\overline{A''B''}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

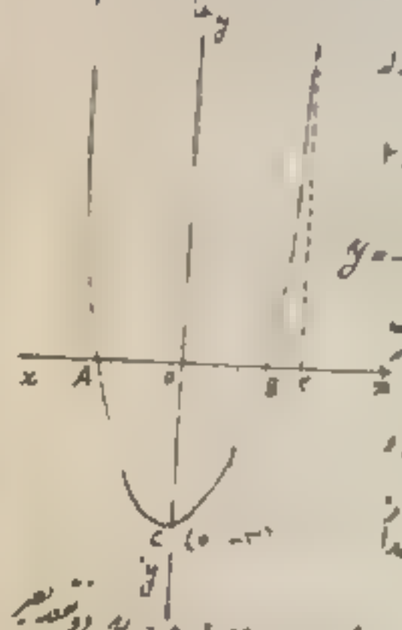
اولاً فرض میکنیم $a>0$ در اینحالت موافق علامات $\frac{b}{2a}$ و c و $\frac{4ac-b^2}{4a}$ هشت شکل ذیل تشکیل میگردد

ثانیاً $a<0$ بعینه همان اشکال تشکیل گردد ولیکن قرینهٔ آنها نسبت بمحور



xها و در حالت اول $\frac{b}{2a}<0$ منحنی خیلی شبیه شود به نمایش ترنیم درجهٔ دویم که قطع مکافی باشد ولیکن در حقیقت قطع مکافی نیست از روی دستور $y=ax^2+bx+c$ و شکل منحنی ظاهر است که بازاء دو مقدار متساویه و مختلفة العلامه x فقط یک مقدار برای y بدست آید پس محور yها بمنزلهٔ محور تقارن منحنیات باشد و بنابراین برای معرفت تغییرات y کافیست که فقط x را از ۰ تا $+\infty$ تغییر داد زیرا که آنوقت تغییرات y بازا

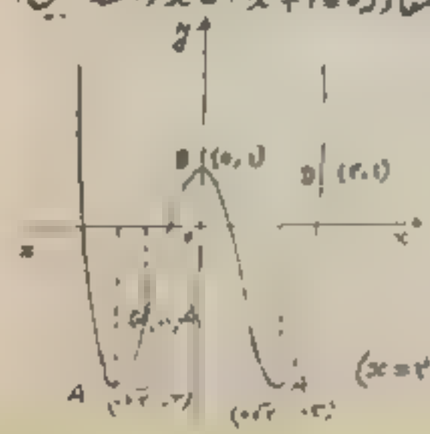
x از $-\infty$ تا $+\infty$ بدست میآید و علاوه بر این توسط همین نمایشات میتوان در حقیقت ریشه های ترینم دو مجذوری مانند درجه دوم بحث نمود



مثال: معلوم کنید چند ریشه از معادله $\frac{x^4}{4}+x^2-3=0$ واقعند مابین ۱ و ۲

چون منحنی این معادله را $y=\frac{x^4}{4}+x^2-3$ رسم کنیم می بینیم که نقطه عمومی آن عبارت از $C(0\ -3)$ و ابسیس های نقاط A و B فصل مشترک منحنی با محور x ها عبارتند از ریشه معادله پس اگر $x=1$ و $y=-\frac{7}{4}$ و $x=2$ و $y=5$ دو نقطه بعد در طرفین B واقع باشند بنابراین فقط یک ریشه از معادله واقعست مابین ۱ و ۲

مثال: معلوم کنید چند ریشه از معادله $x^4-4x^2+1=0$ واقعند مابین ۱- و ۲



چون منحنی معادله $y=x^4-4x^2+1$ را رسم کنیم می بینیم که مختصات دو نقطه C و D عبارتند از $(x=-1\ y=-2)$ و $(x=2\ y=1)$

پس منحنی در چهار نقطه محور x ها را قطع کند و سه ریشه معادله واقعند مابین ۱- و ۲

۵ ـ معادلات معکوسه

۳۴۹ ـ تعریف ـ دو عدد را عکس یکدیگر نامند در صورتیکه حاصل ضربشان مساوی واحد باشد

معادله معکوسه آنستکه ریشه های آن دو به دو عکس یکدیگر باشند یعنی بریشه از معادله نظیر گردد بیک ریشه دیگر که عکس آن باشد

حال شروع میکنیم بذکر شرایط لازمه در ضرایب معادله درجه چهارم

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \qquad (1)$$

برای اینکه این معادله معکوسه باشد پس باید معادله تشکیل دهیم که ریشه های معادله مفروضه باشد چنانکه هر ریشه x از معادله اول نظیر باشد بیک ریشه $y=\frac{1}{x}$ یا $x=\frac{1}{y}$ از معادله ثانی پس از تبدیل x به $\frac{1}{y}$ در معادله اول معادله ثانی ذیل تشکیل میگردد

$$a\frac{1}{y^4}+b\frac{1}{y^3}+c\frac{1}{y^2}+d\frac{1}{y}+e=0$$

و چون طرفین این معادله را در y^4 ضرب کنیم و نسبت بقوای متنازله y مرتب نمائیم چنین شود

$$ey^4+dy^3+cy^2+by+a=0 \qquad (2)$$

برای اینکه معادله (۱) و (۲) دارای یک ریشه باشند لازم و کافیست که ضرایب جمل متناظر متناسب باشند یعنی چنین داشته باشیم

$$\frac{a}{e}=\frac{b}{\alpha}=\frac{c}{c}=\frac{\alpha}{b}=\frac{e}{a}$$

پس اگر c مخالف صفر باشد نسبت $\frac{c}{c}$ مساوی واحد شود و آنوقت شرایط لازمه چنین شوند $a=e$ و $b=\alpha$ بنابراین معادله معکوسه درجه چهارم باید بصورت ذیل باشد

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

یعنی ضرایب جمل متساوی البعد از طرفین باید مرتبا متساوی و متحد العلامه باشند

واما اگر c مساوی صفر باشد چنین خواهیم داشت $\frac{a}{e}=\frac{b}{\alpha}=\frac{e}{a}$

و چون دو جمله طرفین را اختیار کنیم پس از محو مخارج زیرا که a صفر نیست این دو تناسب حاصل شود $\frac{a}{e}=\frac{b}{\alpha}=1$ یا $\frac{a}{e}=\frac{b}{\alpha}=-1$

تناسب اول راجع است بشرایط حالت اول که c مخالف صفر باشد و تناسب دویم متعلق است بشرایط معادله معکوسه درجه چهارم که باین صورت باشد

$$ax^4+bx^3-bx-a=0$$

یعنی جمله درجه دویم آن مفقود باشد و ضرایب جمل متساوی البعد از طرفین متساوی

و مختلف العلامه باشند

پس بطور کلی شرط لازم و کافی برای اینکه هر معادله کلی $f(x)=0$ از معکوسه باشد آنست که طرف اول آن کثیر الجمله منظم باشد چنانکه ضرایب جمل متساوی البعد از طرفین متساوی باشند و یا متساوی و مختلف العلامه در صورتیکه جمله وسطا مفقود باشد مثلا معادلات ذیل معکوسه اند $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

$ax^4+bx^3+bx+a=0$ و $ax^4+bx^3-bx-a=0$

حل هر معادله معکوسه را میتوان راجع کرد بحل معادله درجه دویم و حال میپردازیم بحل معادلات معکوسه درجه سیم و چهارم و پنجم

۳۵۰ - معادله معکوسه درجه سیم - اولا فرض میکنیم این معادله را $ax^3+bx^2+bx+a=0$ چون x را بـ ۱- تبدیل کنیم چنین شود $-a+b-b+a=0$ پس $x=-1$ یک ریشه این معادله است و طرف اول این معادله قابل قسمت است بر $x+1$ و آنرا میتوان چنین نوشت $(x+1)\left[ax^2+(b-a)x+a\right]=0$ پس ریشه های این معادله عبارتند از ۱- و دو ریشه معادله معکوسه درجه دویم $ax^2+(b-a)x+a=0$

ثانیا معادله $ax^3+bx^2-bx-a=0$ چون ریشه $x=1$ قرار بگیرد

پس میتوان آن را چنین نوشت $(x-1)\left[ax^2+(a+b)x+a\right]=0$
و دو ریشهٔ دیگر آن عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ معکوسهٔ درجهٔ دویم ذیل

$$ax^2+(a+b)x+a=0$$

۲۵۱- معادلهٔ معکوسهٔ درجهٔ چهارم — اولاً فرض میکنیم این معادله را
$ax^4+bx^3-bx-a=0$ این معادله دو ریشهٔ ۱ و ۱- قبول میکند
میتوان آن را باین صورت نوشت $a(x^4-1)+bx(x^2-1)=0$
یا $(x^2-1)\left[ax^2+bx+a\right]=0$ و دو ریشهٔ دیگر آن عبارتند از
ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دویم $ax^2+bx+a=0$
ثانیاً فرض میکنیم این معادله را $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$
این معادله کلیهٔ ریشه‌های ۱ و ۱- قبول نمیکند پس برای حل آن ابتدا
طرفین آن را بر x^2 قسمت میکنیم و حاصل را بصورت ذیل مینویسیم

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

و بعد $x+\frac{1}{x}$ یعنی مجموع دو ریشهٔ متعاکسهٔ معادله را مفروضهٔ مجهول فرض
کرده چنین قرار میدهیم $x^2+\frac{1}{x^2}=y$ و چون طرفین را مجذور کنیم حاصل شود
$y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ یا $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

و چون در معادلهٔ (۲) بجای $(x^2+\frac{1}{x^2})$ و $(x+\frac{1}{x})$ مرتباً y^2-2 و y
را قرار دهیم معادلهٔ محلل $a(y^2-2)+by+c=ay^2+by+c-2a=0$
تشکیل شود و از این معادله دو مقدار y_1 و y_2 برای y بدست آید که
هر کدام نظیر باشد بدو مقدار x که از معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=y_1$ یا $x^2-y_1x+1=0$
حاصل شود چون در دستور $x=\frac{y_1\pm\sqrt{y_1^2-4}}{2}$ بجای y_1 مقدار y_2 را
قرار دهیم چهار مقدار حقیقی از برای x استخراج شود که عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ
تنبیه — هرگاه مقادیر y حقیقی نباشند معادلهٔ معکوسهٔ هیچ ریشهٔ نخواهد داشت
و اگر این مقادیر حقیقی باشند چند حالت اتفاق افتد از این قرار
اگر مجذور این دو مقدار بزرگتر از ۴ باشند از برای x چهار
مقدار حقیقی حاصل شود و اگر مجذور یکی از این دو مقدار بزرگتر از ۴ باشد
و دیگری کوچکتر از ۴ فقط دو مقدار حقیقی برای x بدست میآید و بالاخره اگر
مجذور این دو مقدار کوچکتر از ۴ باشند هیچ مقدار حقیقی برای x موجود نباشد
پس از این بیانات مذکوره چنین استنباط کنیم که شرط لازم و کافی برای
اینکه ریشه‌های معادلهٔ معکوسهٔ حقیقی باشند آنست که معادلهٔ محلل و بعد معادلهٔ
$x^2-y_1x+1=0$ دارای ریشه باشند و شرط اخیر چنین میشود $y_1^2-4\geq 0$

پس باید ریشه‌های معادله محلل y با تغییر در r در خارج -2 و $+2$ باشند در موقع بحث معادله معکوسه باید معلوم کرد که چند ریشه از محلل در خارج -2 و $+2$ قرار دارند و آنوقت هر ریشه از محلل تغییر دو ریشه از معادله معکوسه خواهد بود

۳۵۲ - معادله معکوسه درجه پنجم $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$

یا $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx+a=0$ معادله اول همواره ریشه $x=1$ دارد

چون مبلغ معادله دوم دارای ریشه -1 است پس میتوان آنرا چنین نوشت

$$(x+1)\left[ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a\right]=0$$

یا $$(x-1)\left[ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x+a\right]=0$$

و در هر دو صورت حل راجع شود بحل معادله معکوسه درجه چهارم

۳۵۳ - معادله معکوسه قسم ثانی عبارتست از هر معادله که بصورت ذیل باشد $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$

فرض میکنیم x_0 ریشه این معادله باشد پس تساوی

$ax_0^4-bx_0^3+cx_0^2+x_0b+a_0=0$ را میتوان چنین قرار داد:

(خ) $a\left(-\frac{1}{x_0}\right)^4+b\left(-\frac{1}{x_0}\right)^3+c\left(-\frac{1}{x_0}\right)^2-b\left(-\frac{1}{x_0}\right)+a=0$

یا (م) $a+b\frac{1}{x_0}+c\frac{1}{x_0^2}-b\frac{1}{x_0^3}+a\frac{1}{x_0^4}=0$

و از اینجا ظاهر است که $\frac{1}{x_0}$ نیز ریشه معادله است و برای حل این معادله ابتدا طرفین آنرا بر x^2 قسمت میکنیم و باین صورت می‌نویسیم

$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0$ و بعد چنین قرار میدهیم

$y=x-\frac{1}{x}$ و از آنجا $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$ یا $y^2+2=x^2+\frac{1}{x^2}$

پس معادله معکوسه باین صورت در آید $ay^2+by+c+2a=0$ و چون

این معادله را حل کنیم و دو مقدار y را متدرجاً در معادله $y=x-\frac{1}{x}$ قرار

دهیم از برای x چهار مقدار بدست میآید

مثال ۱ - این معادله را حل کنید $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

معادله را باین صورت می‌نویسیم $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$

و بعد چنین قرار میدهیم $y=x+\frac{1}{x}$ و از آنجا $6y^2-35y+50=0$

ریشه‌های این معادله محلل عبارتند از $y_1=\frac{5}{2}$ و $y_2=\frac{10}{3}$ و چون این

دو مقدار را متدرجاً بجای x در معادله $y=x+\frac{1}{x}$ قرار دهیم چهار

مقدار حقیقی ذیل از برای x بدست میآید 2 و $\frac{1}{2}$ و 3 و $\frac{1}{3}$

مثال ۲ - حل کنید این معادله را $10x^4-101x^3+138x^2-101x+10=0$

معادله محلل را تشکیل میدهیم $10y^2-101y+78=0$ و از آنجا

$\frac{13}{6}=y$ و $\frac{6}{5}=y$ و باز اگر $\frac{13}{6}$ دو مقدار $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{2}$ از برای x قیمت میشوند

ولیکن $\frac{6}{5}$ نظر بهیچ مقداری از x نیست پس معادله مفروضه فقط دارای دو ریشه است

مثال ۳ـ حل کنید این معادله را $65x^4-198x^3+274x^2-198x+65=0$

معادله محلل را تشکیل میدهیم $65y^2-198y+140=0$ ریشه های آن

عبارتند از $\frac{5}{6}$ و $\frac{14}{13}$ و چون مجذورات این دو ریشه کوچکتر از ۲

پس معادله مفروضه دارای هیچ ریشه نخواهد بود و همین طریق معلوم میکنیم که

معادله $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ نیز ریشه های حقیقی قبول نمیکند

مثال ۴ـ حل کنید این معادله را $5x^4-12x^3+30x^2-12x+5=0$

معادله را باین صورت می نویسیم $5(x^2+\frac{1}{x^2})-12(x+\frac{1}{x})+30=0$

و بعد چنین قرار میدهیم $x+\frac{1}{x}=y$ پس معادله محلل چنین میشود

$5y^2-12y+20=0$ و چون این معادله ریشه ندارد پس معادله

معکوسه نیز ریشه نخواهد داشت

۶ـ معادلات دو جمله (بینم) و سه جمله مخصوص (ترینم)

۳۵۴ـ معادله دو جمله (بینم) عبارتست از هر معادله که باین

صورت باشد $x^m-A=0$ (۱) که در آن A مقداریست معلوم

مقصود از حل این معادله یافتن اعدادیست مثبت یا منفی یا صفر که چون بجای

x قرار دهیم در معادله مفروضه صدق کنند

اولا فرض میکنیم m زوج باشد در این حالت اگر A مثبت باشد واضح

ذاتیه است که نمیتوان عدد منفی یافت که قوه m ام آن مساوی

A گردد و چنین عدد ریشه m ام حسابی A است و باین رمز نموده

شود $\sqrt[m]{A}$ و علاوه بر این چون ملاحظه کنیم وقتیکه m زوج باشد

این تساوی نیز محقق است $x^m=(-x)^m$ پس میتوان یک عدد

منفی مانند $-\sqrt[m]{A}$ نیز بدست آورد که در معادله (۱) صدق کند بنابر

این وقتیکه m زوج و A مثبت باشد معادله (۱) فقط دارای دو

ریشه است $x=\pm\sqrt[m]{A}$ (۲) و اگر وقتیکه m زوج است

A منفی باشد معادله مفروضه ریشه نخواهد داشت زیرا که هیچ عدد مثبت

یا منفی یافت نشود که قوه زوج آن مساوی یکعدد منفی گردد

ثانیا فرض میکنیم m فرد باشد و اگر A مثبت باشد میتوان فقط یک عدد

مثبت منحصر یافت که قوه m ام آن مساوی A گردد و هیچ عدد منفی یافت

نشود پس معادله (۱) فقط دارای یک ریشه منحصر $x=\sqrt[m]{A}$ خواهد

و اگر وقتیکه m فرد است A منفی باشد معادله مفروضه تواند ریشه مثبت اختیار کند و اما اگر چنین قرار دهیم $A=A'$ که عدد مثبت باشد و $x=-x'$ معادله $(-x')^m=-A'$ یا $x'^m=A'$ فقط یک ریشه منحصر $x=\sqrt[m]{A'}$ قبول میکند پس معادله (۱) فقط دارای یک ریشه منحصر منفی $x=-\sqrt[m]{-A}$ خواهد بود

۳۵۵ - تنبیه - هرگاه دو جمله باین صورت باشد $Ax^p+Bx^q=0$ درصورتیکه $p>q$ میتوان x^q را عامل مشترک قرار داد و چنین نوشت $x^q\left[Ax^{p-q}+B\right]=0$ و از اینجا ظاهر است که معادله مفروضه ابتدا ریشه $x=0$ قبول میکند و بعد ریشه‌هائیکه از این معادله حاصل شود $Ax^{p-q}+B=0$ و چون قرار دهیم $p-q=m$ و $-\frac{B}{A}=a$ - معادله اخیر باین صورت نموده شود $x^m=a$ بنابراین هر معادله دو جمله پس از استخراج ریشه صفر همواره بصورت کلی ذیل درآید $x^m-a=0$ و این معادله بعینه همان معادله (۱) است

مثال ۱ - معادله $x^3-1=0$ را حل کنید - این معادله را میتوان باین صورت قرار داد $(x-1)(x^2+x+1)=0$ پس فقط یک ریشه حقیقی قبول کند

مثال ۲ - این معادله را حل کنید $x^5-1=0$ میتوان آنرا بدو عامل تجزیه کرده باین صورت درآورد $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ از عامل اول حاصل شود $x=1$ ولیکن عامل دوم هیچ ریشه حقیقی قبول نکند پس معادله مفروضه فقط دارای یک ریشه حقیقی است $x=1$ و همین طریق معادلات ذیل را حل میکنیم $x^3-729=0$ ، $x=\pm 3$ ، $x^5-32=0$ ، $x=2$ ، $x^5+32=0$ ، $x=-2$ ، $x^2-1=0$ ، $x=\pm 1$ ، $x^3+27=0$ ، $x=-3$ و اما این دو معادله $x^2+2=0$ و $x^4+729=0$ هیچ ریشه حقیقی قبول نکند

۳۵۶ - معادلات شبه جمله (ترینوم) - معادله شبه جمله عبارتست از معادله که دارای شبه جمله باشد باین صورت $ax^{2m}+bx^m+c=0$ که در آن ضرایب a و b و c مقادیر معلومه اند پس هرگاه $m=2m$ حل این معادله مانند معادله دو مجذوری راجع شود بحل معادله درجه دویم و بعد بحل دو معادله دو جمله زیرا که اگر چنین قرار دهیم $x^m=y$ معادله شبه جمله $ax^{2m}+bx^m+c=0$ بصورت معادله محلل ذیل درآید $ay^2+by+c=0$ و اگر این معادله محلل دارای دو ریشه حقیقی

y_2 و y_1 باشد مقادیری برای x اختیار میکنیم که در دو معادله ذیل صدق کنند $y_1 = x^{n_1}$ و $y_2 = x^{n_2}$ و این مقادیر عبارتند از ریشه های معادله سه جمله مفروض

هرگاه n_1 فرد باشد هر ریشه y_1 از معادله محلل نظر شود فقط یک ریشه منحصر از معادله مفروضه $x' = \sqrt[n_1]{y_1}$ و اگر n_1 زوج باشد هر ریشه مثبت y_1 از محلل نظر گردد دو ریشه متساویه و مختلفة العلامه $\sqrt[n_1]{y_1}$ و $-\sqrt[n_1]{y_1}$ هر ریشه منفی از محلل ادا نظر هیچ ریشه حقیقی از معادله مفروضه نخواهد بود

۲۵۷ - تنبیه - هرگاه معادله سه جمله باین صورت باشد (۱) $ax^p + bx^q + cx^r = 0$ چنانکه $p - q = q - r$ فرض میکنیم m تفاضل $q - r$ باشد پس چنین خواهیم داشت

$$p = q + m = 2m + r \quad , \quad q = m + r$$

و معادله (۱) باین صورت نوشته شود $ax^{2m+r} + bx^{m+r} + cx^r = 0$ و چون x^r را عامل مشترک قرار دهیم چنین حاصل شود چنین خواهیم داشت

$x^r[ax^{2m} + bx^m + c] = 0$ و از اینجا ظاهر است که معادله (۱) ابتدا ریشه $x = 0$ قبول کند و بعد ریشه های معادله ذیل را که بینه همان معادله (۱) سابق است $ax^{2m} + bx^m + c = 0$

مثال ۱ - این معادله را حل کنید $x^7 - 3x^6 - 4x = 0$ ابتدا طرفین را بر x قسمت میکنیم تا ریشه $x = 0$ از معادله مفروضه خارج شود و چنین حاصل گردد $x^6 - 3x^5 - 4 = 0$ و بعد چنین قرار میدهیم $x^5 = y$ و از اینجا $y^2 - 3y - 4 = 0$ ریشه های این معادله محلل عبارتند از 4 و -1 پس ریشه های معادله مفروضه چنین باشند $\sqrt[5]{4}$ و -1 و 0

مثال ۲ - این معادله را حل کنید $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ معادله محلل چنین میشود $y^2 - 7y - 8 = 0$ و از آنجا $y_1 = -1$ و $y_2 = 8$ و اینها در ریشه نظیرند با ریشه های معادله مفروضه $\sqrt[3]{-1} = -1$ و $\sqrt[3]{8} = 2$

مثال ۳ - این معادله را حل کنید $1000x^6 - 6119x + 9261 = 0$ معادله محلل چنین میشود $1000y^2 - 6119y + 9261 = 0$ و از آنجا $y_1 = \frac{27}{8}$ و $y_2 = \frac{343}{125}$ پس ریشه های حقیقی معادله مفروضه عبارتند از $\frac{3}{2}$ و $\frac{7}{5}$

مثال ۴ - حل کنید این معادله را $x^8 + 4x^4 - 5 = 0$ معادله محلل چنین میشود

$x^2 - 5 = 0$ و از آنجا $x^2 = 5$ و $x = \pm\sqrt{5}$ ریشه اول نظر است؛

ریشه $x = \pm 1$ ولیکن ریشه دویم نظر هیچ مقداری از x نیست

۷ ــ معادلات اصم

۳۵۸ ــ هرگاه در معادله یکی از طرفین یا هر دو طرف شامل رادیکال باشد ابتدا آن معادله را بصورت منطق در آوریم ولیکن نتوان مطمئن شد که معادله جدید معادل معادله مفروضه باشد پس از روی قضایای ذیل قواعد تبدیل معادله مفروضه را بصورت منطق و شرایط آنرا بدست آورد

۳۵۹ ــ **قضیه ۱** ــ هرگاه طرفین معادله $A = B$ (۱) را مجذور کنیم معادله جدید $A^2 = B^2$ (۲) شامل جمیع ریشه های معادله اول باشد ولی کلیه معادل آن نگردد

برهان ــ ابتدا می بینیم وقتیکه معادله (۱) محقق باشد معادله (۲) نیز محقق است زیرا اگر بجای مجهولات مقادیر عددیه شان را قرار دهیم چنانکه مقدار عددیه A مساوی مقدار عددیه B باشد پس مقدار عددیه A^2 و B^2 نیز مساوی خواهند بود ولیکن عکس این حالت قهراً صحیح نیست زیرا که چون معادله (۲) را باین صورت قرار دهیم $A^2 - B^2 = 0$ و $(A-B)(A+B) = 0$ (۳) برای اینکه معادله

(۲) محقق باشد لازم و کافیست که یکی از عوامل آن صفر باشد اگر $A - B$ صفر باشد معادله (۱) محقق است و اگر $A + B$ صفر باشد معادله (۱) محقق نیست ولیکن معادله (۲) محقق است پس دو معادله (۱) و (۲) قهراً معادل نباشند و علاوه بر این از روی دلیل فوق ظاهر است که بواسطه مجذور کردن معادله (۱) ریشه های خارجی در آن داخل گردند یعنی ریشه های این معادله $A - B = 0$ (۴) که حاصل شود از تغییر دادن علامت یکی از طرفین معادله (۱) و در حالت مخصوص وقتیکه معادله (۲) دارای ریشه نباشد معادله (۱) و (۲) معادل گردند

۳۶۰ ــ حل معادله که بصورت $P = \sqrt{Q}$ باشد (P و Q عبارتند از دو کثیر الجمله صحیح و منطق) ــ از روی قضیه فوق میتوان وقتیکه معادله مفروضه بصورت صحیح و فقط شامل یک رادیکال جذر باشد آنرا بقرار ذیل منطق نمود ابتدا رادیکال را بیک طرف معادله نقل کرده و منفرد گذاریم باین صورت $P = \sqrt{Q}$ (۱) و بعد طرفین را مجذور میکنیم تا این معادله منطق حاصل شود $P^2 = Q$ (۲) و این معادله را حل میکنیم ولیکن پس از حل باید تحقیق کرد که اجوبه حاصل شده در معادله (۱) صدق میکنند یا اینکه خارجی هستند یعنی ریشه های این معادله $P = -\sqrt{Q}$ (۳)

فرض میکنیم معادله (۲) را بتوان حل کرد یعنی از درجه اول یا دوم و یا معادله دو مجذوری باشد و $x=\alpha$ یک ریشه حقیقی از این معادله باشد اگر این ریشه مقدار کثیر الحدود P و Q را صفر کند جواب معادله (۱) خواهد بود و اما اگر مقدار P و Q را صفر نکند گوئیم که در کثیر الحدود Q چون بجای x مقدار α قرار دهیم حاصل مثبت میگردد یعنی $\sqrt{Q}$ حقیقی است زیرا که چون مقدار حقیقی $x=\alpha$ در معادله (۲) صدق میکند پس مقدار P حقیقی و P مثبت است و Q نیز مثبت خواهد بود و آنوقت $\sqrt{Q}$ حقیقی است

و بنابراین هرگاه بنتیجه تبدیل x به α در کثیر الحدود P مثبت باشد α ریشه معادله (۱) خواهد بود زیرا که P نتواند مساوی شود مگر به $+\sqrt{Q}$ یا $-\sqrt{Q}$ و اگر بالعکس P منفی باشد α ریشه معادله (۳) است و در معادله (۱) صدق نخواهد نمود یعنی ریشه خارجی است

مثال ۱- حل کنید این معادله را $2a-x=3\sqrt{ax-a^2}$ (a عدد ثابت مثبت) - چون طرفین این معادله را مجذور کنیم پس از اختصار معادله منتج ذیل حاصل شود $x^2-13ax+13a^2=0$

و از آنجا این دو ریشه نتیجه شوند $x'=\frac{a(13+3\sqrt{13})}{2}$ و $x''=\frac{a(13-3\sqrt{13})}{2}$

و حال باید تحقیق کرد که این ریشه‌ها در معادله مفروضه مناسب هستند چون بجای x مقدار x' را در کثیر الحدود $2a-x$ قرار دهیم حاصل منفی میشود $\frac{a(-9-3\sqrt{13})}{2}$ پس ریشه خارجی است یعنی جواب این معادله است $2a-x=-3\sqrt{ax-a^2}$ و لیکن نتیجه تبدیل x به x'' در کثیر الحدود $2a-x$ مقداریست مثبت $\frac{a(-9+3\sqrt{13})}{2}$ پس فقط x'' ریشه معادله است

مثال ۲- حل کنید این معادله را $2a+x=-\sqrt{ax+x^2}$ چون طرفین را مجذور کنیم پس از اختصار معادله درجه اول ذیل حاصل شود $3x+4a=0$ و از آنجا $x=-\frac{4a}{3}$ ولیکن این مقدار در معادله مفروضه صادق نیاید چونکه طرف اول معادله را مثبت میکند پس معادله ریشه ندارد

مثال ۳- این معادله را حل کنید $x^2-x+1=+\sqrt{x^2-2x+1}$

پس از ترتیب و اختصار چنین شود $x^4-2x^3-3x^2=0$

یا $x^2(x^2-2x-3)=0$ و از آنجا ریشه‌های ذیل نتیجه شوند 0 و 0 و -1 و 3 هر کدام از این ریشه‌ها در معادله مفروضه صدق کند چونکه باز هر کدام از آنها مقدار ترینم (x^2-x+1) که ریشه ندارد همواره مثبت است

مثال ۴- این معادله را حل کنید $x^2-x+1=-\sqrt{x^2-2x+1}$

با طرفین را مجذور کنیم پس از اختصار مانند مسئله سابق چنین حاصل شود

$x^2(x^2-2x-3)=0$ و از آنجا ریشه‌های ذیل نتیجه میشود $0, 0, 0, -$

3 و بنابراین هیچ کدام از این ریشه‌ها در معادله مفروضه صدق نمیکند چونکه

با ازاء هر کدام از آنها طرف اول معادله مثبت میشود پس معادله مفروضه ریشه ندارد

۳۶ـ حل معادله که بصورت $\sqrt{P}=\pm\sqrt{Q}$ باشد

(P و Q عبارتند از کثیرالجمله‌های صحیح و منطق)ـ اولاً چون $\sqrt{}$ اوّل کامل‌ها

حقیقی فرض شده پس مستقیماً می‌بینیم که معادله $\sqrt{P}=-\sqrt{Q}$ ریشه قبول نکند

مگر وقتیکه P و Q باز از یک مقدار حقیقی یک دفعه صفر شوند

ثانیاً چون طرفین معادله $\sqrt{P}=\sqrt{Q}$ (۱) را مجذور کنیم حاصل شود

$P=Q$ (۲) هرگاه $x=\alpha$ یک ریشه حقیقی از معادله (۲) باشد

برای حقیقی بودن $\sqrt{}$ اوّل کامل‌ها وقتیکه $x=\alpha$ مقدار P و Q را صفر کند

لازم و کافیست که مقدار یکی از این دو کثیرالجمله را مثبت گرداند چونکه بموجب

معادله (۲) که محقق فرض شده مقادیر P و Q یک علامت میباشند

پس موافق این شرایط α ریشه معادله (۱) است

۳۷ـ حل معادله که بصورت $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=\sqrt{R}$ باشد

(P و Q و R عبارتند از کثیرالجمله‌های صحیح و منطق)ـ وقتیکه معادله اصم

بیشتر از یک $\sqrt{}$ اوّل کامل جذر شامل باشد میتوان مربعات متوالیه پس از اینکه

هر دفعه یک $\sqrt{}$ اوّل کامل را در یک طرف منفرد قرار دهیم معادله اصم را بصورت

معادله منطق درآورد ولیکن ممکن است هر دفعه ریشه‌های خارجی در معادله

داخل گردند پس باید ریشه‌ها را تحقیق نمود

مثلاً فرض میکنیم این معادله را $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=\sqrt{R}$ (۱) چون باید

$\sqrt{R}$ را در یک طرف معادله منفرد سازیم پس از تربیع چنین شود

$P+Q+2\sqrt{PQ}=R$ یا $R-P-Q=2\sqrt{PQ}$ (۲)

و چون معادله جدید (۲) را مجذور کنیم معادله منطق ذیل حاصل شود

$(R-P-Q)^2-4PQ=0$ (۳) پس اگر حل این معادله اخیره

ممکن باشد فرض میکنیم $x=\alpha$ یک ریشه از این معادله است لیکن نتوان

مطمئن شد که α بالضروره در معادله (۱) صدق کند بلکه میتواند ریشه

این دو معادله ذیل باشد $R-P-Q=-2\sqrt{PQ}$ یا

$\sqrt{P}+\sqrt{Q}=-\sqrt{R}$ پس باید ریشه α را تحقیق نمود از این قرار

هرگاه α دو تای از سه کثیرالجمله P و Q و R را صفر کند پس هر سه کثیرالجمله را

صفر کند و ریشه معادله (۱) باشد و اگر α هیچ کدام از P و Q و R را صفر نکند در این صورت ابتدا باید هر کدام از رادیکال های $\sqrt{P}$ و $\sqrt{Q}$ و $\sqrt{R}$ را بازاء $x=\alpha$ مقدار حقیقی اختیار کند یعنی مقادیر P و Q و R مثبت باشند و حال گوییم شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن رادیکال ها آنستکه فقط مقدار یکی از سه کثیر الجمله P و Q و R مثبت باشد زیرا که چون ملاحظه کنیم بموجب معادله (۳) مقدار $(R-P-Q)$ بازاء $x=\alpha$ مثبت است پس حاصل ضرب PQ نیز مثبت باشد و مقادیر P و Q متحد العلامه اند پس برای اینکه این دو مقدار مثبت باشند لازم و کافی است که یکی از آنها مثلاً P مثبت باشد و اگر این شرط محقق گردد چون $\sqrt{Q}$ و $\sqrt{P}$ حقیقی اند پس $\sqrt{P}+\sqrt{Q}$ و همچنین $\sqrt{P}-\sqrt{Q}$ مقادیر حقیقی اختیار کنند و مقدار $\sqrt{R}$ نیز حقیقی خواهد بود و بنابراین شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن رادیکال ها آنستکه یکی از سه کثیر الجمله P و Q و R بازاء $x=\alpha$ مقدار مثبت اختیار کند

فرض میکنیم این شرط فوق محقق باشد باز α ریشه معادله (۱) نگردد پس برای

تحقیق آن مقدار کثیر الجمله $R-P-Q$ را بازاء $x=\alpha$ تشکیل دهیم اگر این مقدار مثبت باشد α ریشه معادله (۲) خواهد بود و الا α ریشه خارجی است و علاوه بر این در همین حالت اگر $R-P-Q$ مقدار مثبت اختیار کند α ریشه معادله (۱) خواهد بود زیرا که نتواند ریشه معادله دیگر باشد مگر $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=-\sqrt{R}$ و لیکن این معادله محال است چونکه مقادیر طرفین حقیقی و مختلف العلامه اند

و همین طور بسهولت معلوم میشود که اگر یک ریشه حقیقی از معادله (۳) فقط یکی از کثیر الجمله های P و Q و R را صفر کند برای حقیقی بودن رادیکال ها لازم و کافیست که یکی از دو کثیر الجمله دیگر مقدار مثبت اختیار کند

۳۶۳ - تنبیه - هرگاه معادله (۳) را بسط دهیم حاصل شود

$$P^2+Q^2+R^2-2P\cdot Q-2P\cdot R-2QR=0 \qquad (4)$$

و بآسانی میتوان تحقیق کرد که این معادله مشابل اجزاء چهار معادله زیر است

$$\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0 \quad , \quad \sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}=0$$

$$\sqrt{P}-\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0 \quad , \quad \sqrt{P}-\sqrt{Q}-\sqrt{R}=0$$

و اگر هر کدام از این معادلات فوق را بصورت منطق تبدیل کنیم و بسط

دهیم بصورت معادله (۴) درآید پس باید هر دو ریشه‌ای حاصل شده را تحقیق نمود

مثال ۱ - این معادله را حل کنید $\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^2-7x+13}=1$

ابتدا می‌بینیم که ترینم $x^2-7x+13$ چون دارای ریشه نیست پس بازاء

هر مقدار حقیقی از x که در معادله (۱) صدق کند مقادیر رادیکال‌ها حقیقی

باشند و چون یکی از رادیکال‌ها مثلاً رادیکال اول را در یکطرف معادله

منفرد کنیم حاصل شود $\sqrt{x^2-5x+4}=1-\sqrt{x^2-7x+13}$ (۲)

و پس از تربیع و اختصار چنین شود $x-5=-\sqrt{x^2-7x+13}$ (۳)

و چون مجدداً مجذور کنیم حاصل شود $x=4$ پس این معادله فقط دارای

یک ریشه است که در معادله (۳) صدق کند چونکه مقدار $x=-3$ بازاء

$x=4$ منفی است و همین ریشه در معادله (۲) نیز صادق آید چونکه بازاء

آن هر دو طرف معادله صفر شود

مثال ۲ - حل کنید این معادله را $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13}$ (۱)

پس از تربیع حاصل شود $5x+9=2\sqrt{(2x+3)(5x+1)}$ (۲)

و چون مجدداً مجذور کنیم نتیجه شود $15x^2-22x-69=0$ (۳)

ریشه‌های این معادله اخیره عبارتند از 3 و $-\frac{23}{15}$ و بازاء $x=3$ مقدار

رادیکال‌ها حقیقی اند و کسر ابجد $5x+9$ طرف اول معادله (۲) نیز مثبت است

پس این ریشه در معادله (۱) که طرفین آن متحد العلامه اند صدق کند و اما بازاء

ریشه منفی $-\frac{23}{15}$ مقدار $2x+3$ منفی است پس این ریشه در معادله (۱) صادق نیست

مثال ۳ - حل کنید این معادله را $\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{x^2-9}$ (۱)

پس از تربیع طرفین حاصل شود $x^2+15=+2\sqrt{x^4+2x^2+9}$ (۲)

و چون مجدداً مجذور کنیم معادله ذو مجهولی نتیجه شود $3x^4-22x^2-189=0$ (۳)

و این معادله اخیره فقط دارای دو ریشه حقیقی است $x=\pm\sqrt{\frac{11+4\sqrt{43}}{3}}$ و این

دو ریشه مختلف العلامه اند و مقدار x^2-9 بازاء یکی از این دو ریشه مثبت است

پس مقدار رادیکال‌ها حقیقی باشند ولیکن فقط بازاء ریشه مثبت طرف اول

معادله (۱) مثبت باشد پس ریشه قابل قبول منحصر است به $x=+\sqrt{\frac{11+4\sqrt{43}}{3}}$

۴۲ - تنبیه - هرگاه معادله اصم دارای سه رادیکال جذر یک

جزء منطق یا بیش از سه رادیکال باشد همین طریق مذکور شرایط حقیقی بودن

رادیکال‌ها را بحث میکنیم و اجزاء معادله منطقه را که بدست آید مقدار حقیقی

میکنیم که به سرعت عمل تبدیل معادله اصم بصورت منطق منوط است بطریقه

محاسبه که اختیار شود

۳۰۵ - قضیه ۲ هرگاه فقط اجوبه حقیقیه معادله $A=B$ (۱) را اعتبار کنیم معادله $A^m=B^m$ (۲) معادل شود با معادله (۱)، وقتیکه m فرد باشد و معادل آن نگردد وقتیکه m زوج باشد و در این حالت بعلاوه اجوبه معادله

(۳) $A=-B$ را نیز قبول کند

ابتدا هر ریشه از معادله (۱) ریشه معادله (۲) است و حال باید دید که هر ریشه از معادله (۲) در معادله (۱) صدق میکند

اگر m فرد باشد هر کدام از عبارات A^m و B^m فقط یک ریشه حقیقی دارند متحد العلامه با هر کدام از A و B قبول کنند و اگر بفرض معادله (۲) محقق باشد A^m و B^m مقادیر عددیه متساویه اختیار کنند و ریشه m ام آنها نیز متساوی میگردند و معادله (۱) محقق باشد

و هرگاه m زوج باشد هر کدام از عبارات A^m و B^m دو ریشه حقیقی و متساوی و مختلف العلامه $\pm A$ و $\pm B$ اختیار کنند و اگر معادله (۲) محقق باشد A^m و B^m دارای مقادیر عددیه متساویه باشند و اما بجهت آنکه مقادیر عددیه A و B متحد العلامه یا مختلف العلامه باشند در این صورت معادله (۱) یا معادله (۳) محقق گردد و در این حالت عمومیت معادله (۲)

بیشتر است از معادله (۱)

۳۰۶ - تنبیه ۱ - هرگاه ریشه‌های موهومی را در بحث داخل کنیم بیانات مذکوره فوق صحیح نباشند چونکه معادله (۲) معادل معادله (۱) نگردد بلکه علاوه بر اجوبه معادله (۱) شامل اجوبه معادله ذیل نیز خواهد بود

$$A^{m-1}+A^{m-2}B+A^{m-3}B^2+\cdots+B^{m-1}=0 \qquad (۴)$$

زیرا که چون این تساوی را قرار دهیم

$$A^m-B^m=(A-B)\left(A^{m-1}+A^{m-2}B+\cdots+B^{m-1}\right)$$

می‌بینیم برای اینکه A^m-B^m صفر باشد یعنی معادله (۲) محقق گردد لازم و کافیست که یکی از عوامل حاصل ضرب صفر باشد اگر چنانچه عامل اول صفر باشد معادله (۱) محقق است و اگر عامل دوم صفر باشد معادله (۴) محقق خواهد بود پس اگر جمیع ریشه‌های حقیقی یا موهومی را اعتبار کنیم معادله (۱) و (۲) متعادل نگردند

۳۰۷ - تنبیه ۲ - مورد استعمال قضیه ۲ برای منطق کردن معادله اهمی است که شامل یک یا چند رادیکال باشد چنانکه نماینده ریشه یکی از آنها اقلا غیر از ۲ باشد

مثال ۱- این معادله را حل کنید $\sqrt[3]{x^3-2}=x-1$

چون طرفین را مکعب کنیم ریشه حقیقی در معادله داخل نگردد و حاصل شود

$x^3-2=(x-1)^3$ و پس از اختصار $3x^2-3x-1=0$ و از آنجا $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$

دو ریشه در معادله منفرد صدق کنند

مثال ۲- این معادله را حل کنید $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=0$ (1)

چون رادیکال اخیر را منفرد قرار دهیم $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}=-\sqrt[3]{x-3}$ (2)

و نظر باتحاد $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

چون معادله (2) را مکعب کنیم حاصل شود

$$x+x-1+3\sqrt[3]{x(x-1)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}\right)=-x+3$$

و بنابر موجب معادله (2) حاصل شود $3x-4=3\sqrt[3]{x(x-1)(x-3)}$

و این معادله معادل است با معادله (1) و چون مجدداً مکعب کنیم پس از اختصار

معادله منطقی حاصل شود $63x-64=0$ و از آنجا $x=\frac{64}{63}$

و این مقدار در معادله (1) صدق میکند

مثال ۳- حل کنید این معادله را $\sqrt[4]{x^4-4x^3+4}=x-1$ (1)

چون طرفین را بتوان چهار رسانیم پس از اختصار چنین حاصل شود

(2) $4x^3-12x^2+6x-3=0$ این معادله جدید معادل معادله (1) نیست و ریشه‌های

حقیقی آن و علاوه بر این بازاء هر کدام از این ریشه‌های حقیقی مقدار رادیکال

حقیقی است چونکه مقدار $(x-1)$ مساویست با رادیکال که بعلامت + یا - باشد و حال باید دید که بازاء چند عدد از این ریشه‌ها مقدار $(x-1)$

مثبت میشود ریشه منفی مناسب نیست و اما بازاء ریشه مثبت مقدار $(x-1)$

مثبت است زیرا که چون در ترتیم طرف اول معادله (2) عدد (1) قرار دهیم

حاصل منفی شود پس عدد (1) واقعاً بین دو ریشه این معادله و ریشه $x=\frac{2+\sqrt{22}}{6}$ در معادله (1) صدق کند

امثله متعلقه بفصل پانزدهم

۱- معادلات دو مجذوری ذیل را حل کنید

$x^4-5x^2+4=0$ و $4x^4-17x^2+4=0$

$x^4-8x^2-9=0$ و $a^2b^2x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$

$(3x^2+5x-1)^2-28(3x^2+5x)+175=0$ و $5x^4-8x^2-3=0$

$c^4x^4+(a^2c^2-b^2c^2)x^2-a^2b^2=0$ و $\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$

۲- معادلات ذیل را بعوامل درجه دوم تجزیه کنید

x^4-6x^2+1 و x^4+2x^2-1 و x^4-x^2+4

x^4+34x^2+223 و x^4-2x^2+9 و $3x^4-5x^2+1$

۳ـ بحث مقادیر λ در معادلات ذیل بحث کنید

$x^4-2(\lambda+5)x^2+\lambda^2-7=0$ و $(\lambda-2)x^4+2(\lambda-3)x^2+\lambda=0$

$(\lambda-2)x^4+4(\lambda+3)x^2+\lambda-1=0$ و $x^4-(3\lambda+4)x^2+(\lambda+1)^2=0$

۴ـ مواضع اعداد ۳ و ۵ و ۱۰ را نسبت بریشه‌های معادلات ذیل معلوم کنید

$x^4+6x^2-7=0$ و $3x^4-5x^2+1=0$ و $2x^4-5x^2+1=0$

۵ـ تغییرات ترینم‌های ذیل را تعیین کنید و منحنیات آنها را رسم کنید

x^4+3x^2+2 و x^4+x^2-1 و $-x^4+2x^2-5$

x^4-6x^2+1 و $-x^4+4x^2$ و $-x^4+4x^2-1$

۶ـ در ترینم‌های ذیل معلوم کنید مابین چه حدود باید x را تغییر داد تا مقدار y مثبت یا منفی باشد، تغییرات y را بنمائید و منحنی آنها را رسم کنید

$y=x^4-16x^2+63$ و $y=x^4-43x^2+225$

$y=x^4-12x^2+32$ و $y=56-5x^2-x^4$

۷ـ عبارات ذیل را تبدیل کنید $\sqrt{6\pm2\sqrt{5}}$ و $\sqrt{8\pm2\sqrt{7}}$

فصل شانزدهم

دستگاه معادلات چند مجهولی درجه دوم

۱ـ دستگاه مرکب یک معادله درجه دوم و یک یا چند معادله درجه اول

۳۶۸ـ ابتدا دو معادله دو مجهولی فرض میکنیم یکی از درجه دوم باشد و دیگری از درجه اول

هر معادله دو مجهولی درجه دوم را پس از اختصار میتوان بصورت کلی ذیل آورد

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

که در آن a و b و c و d و e و f مقادیر معلوم‌اند

و همچنین هر معادله دو مجهولی درجه اول نیز پس از اختصار بصورت کلی ذیل میشود

$y=mx+n$ (۲) برای حل این دستگاه معادلات (۱) و (۲) قاعده تبدیل را که در دستگاه‌های قبل آموخت که رسیده بر میشود بازمیگردد

یکی از معادلات آن دستگاه در نتیجه یک مجهولت کم خواهد شد پس اگر در معادله (۱) بجای y عبارت $mx+n$ را که از معادله (۲) حاصل شده قرار دهیم معادله ذیل تشکیل میشود

$$(a+bm+cm^2)x^2+(bn+2cmn+d+em)x+(cn^2+en+f)=0 \qquad (3)$$

این معادلهٔ (۳) با انضمام معادلهٔ (۲) دستگاه معادلی بدستگاه مفروض تبدیل میشود
و چون معادلهٔ (۳) بطور کلی از درجهٔ دویم است از آنجا دو مقدار x' و x'' برای
x حاصل میشود و بعد از معادلهٔ (۲) نیز دو مقدار ذیل را برای y بدست میآید

$$y'' = mx'' + n \quad , \quad y' = mx' + n$$

هرگاه فرض کنیم در معادلهٔ (۳) ضریب x^2 یعنی $a + bm + cm^2$
صفر باشد ولیکن ضریب جملهٔ x مخالف صفر در اینصورت معادلهٔ (۳) منجر شود
بدرجهٔ اول و دارای یک جواب x باشد و این مقدار x نظیر کرده با مقدار
y که از معادلهٔ $y = mx + n$ حاصل شود تنها دستگاه مفروض فقط
یک جواب قبول کند

اما اگر فرض کنیم ضریب جملهٔ x^2 و x هر دو یکمرتبه صفر باشند و اما جملهٔ معلوم
مخالف صفر در اینصورت معادلهٔ (۳) هیچ ریشه قبول نکند پس دستگاه مفروض فقط
جواب نخواهد داشت و بالاخره اگر ضریب جملهٔ x^2 و x و مقدار جملهٔ معلوم هر سه
یکمرتبه صفر باشند معادلهٔ (۳) مبدل گردد بصورت اتحاد و هر مقدار غیر مشخص از
x در آن معادله صدق میکند بنابراین دستگاه مفروض دارای اجوبهٔ لاینتهایی
خواهد بود و بازاء هر مقدار غیر مشخص x از x مقدار نظیرش از y نیز چنین میشود

$y = mx + n$ و بسهولت میتوان تحقیق کرد که مقدار بجای y
کثیر الجملهٔ طرف اول معادلهٔ (۱) قابل قسمت است بر $y - mx - n$
هرچه باشد مقدار اختیاری x که نیز از ضرب متغیرات

مثال ۱ — فرض میکنیم مقصود حل بین دو معادلهٔ ذیل باشد

$$8x - y = 3 \quad , \quad x^2 + 4xy - 5y^2 + 12x + 92 = 0$$

معادلهٔ ثانی را باینصورت مینویسیم $y = 8x - 3$ و چون در معادلهٔ
اول بجای y مقدارش $8x - 3$ را قرار دهیم پس از اختصار چنین
حاصل میشود $287x^2 - 240x - 47 = 0$ و از این معادله
درجهٔ دویم دو مقدار ذیل برای x بدست آید

$$x = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 + 287 \times 47}}{287} = \frac{120 \pm 167}{287}$$

و از آنجا $x' = 1$ و $x'' = -\frac{47}{287}$ و بعد مقادیر y نیز چنین شوند

$$y' = 8x' - 3 = 5 \quad , \quad y'' = 8x'' - 3 = -\frac{1237}{287}$$

مثال ۲ — حل کنید دستگاه دو معادلهٔ ذیل را

$$y = 3x + 1 \quad , \quad 12x^2 - 7xy + y^2 + 2x - y + 3 = 0$$

چون در معادلهٔ اول بجای y مقدار $3x + 1$ را قرار دهیم این معادله

درجه اول حاصل شود $2x + 3 = 0$ — لهذا دستگاه مفروض فقط دارای یک جواب باشد .. $x = \frac{3}{2}$ و $y = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$

مثال ۳ — حل کنید این دو معادله را

$$y^2 + 3x + 1 = 0 \quad , \quad 3x^2 + 4xy + y^2 + 13x + 5y + 4 = 0$$

چون در معادله اول بجای y مقدارش $-3x - 1$ را قرار دهیم این معادله بتبدیل میشود $0x^2 + 0x + 0 = 0$ واضحست که هر مقدار غیر مشخص که بجای x در این معادله قرار دهیم صدق میکند و بآسانی میتوان تحقیق کرد که عضو اول معادله اول قابل قسمت است بر $y + 3x + 1$ و آن را میتوان باین صورت نوشت $(y + x + 4)(y + 3x + 1)$ و از اینجا ظاهر است که دستگاه مفروض چون معادل است فقط با معادله منحصر $y + 3x + 1 = 0$ پس مسئله حل شد

۳۶۹ — هر دستگاه مرکب از سه معادله سه مجهولی، اگر یکی از درجه دوم باشد و دوتای دیگر از درجه اول میتوان بطریق مذکور حل نمود مثلاً مجهولات x و y و z فرض میکنیم و از دو معادله درجه اول دو مجهول y و z را استخراج میکنیم $y = mx + n$ و $z = px + q$ و چون از معادله درجه دوم بجای y و z مقادیر حاصله فوق را قرار دهیم یک

معادله درجه دوم بحسب x حاصل شود $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ لهذا دستگاه مفروض را میتوان تبدیل کرد بدستگاه معادل ذیل

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad , \quad y = mx + n \quad , \quad z = px + q$$

از معادله اول دو مقدار x' و x'' برای x نتیجه میشود و چون این دو مقدار را متدرجاً در دو معادله دیگر قرار دهیم برای y و z نیز دو مقدار ذیل حاصل میگردد $y' = mx' + n$ و $z' = px' + q$ و $y'' = mx'' + n$ و $z'' = px'' + q$ پس دستگاه مفروض دارای دو جواب باشد بالاخره بهمین طریق مذکور میتوان هر دستگاه مرکب از n معادله و n مجهولی را که یکی از آنها درجه دوم و $(n-1)$ معادله دیگر از درجه اول باشد حل نمود

مثال ۱ — حل کنید این دستگاه سه معادله ذیل را

$$2x^2 + y^2 - 4xz - 2yz + 3x - 4y - 13 = 0$$

$$5x - y - z - 2 = 0 \quad , \quad 7x - 3y + z + 6 = 0$$

از دو معادله درجه اول چنین حاصل میشود $z = 2x - 3$ و $y = 3x + 1$ و چون این دو مقدار را در معادله درجه دوم نقل کنیم معادله درجه دوم ذیل بحسب

x تبدیل میشود $2x^2+(3x+1)^2-4x(2x-2)-$

$-2(3x+1)(2x-3)+3x-4(3x+1)-13=0$

پس از اختصار چنین میشود

$9x^2-23x+10=0$ ریشه‌های این معادله عبارتند از $x'=\frac{5}{9}$ و $x''=2$ و با ازاء این دو مقدار x دو مقدار از برای y و z بدست آید $y'=\frac{8}{3}$ و $z'=-\frac{17}{9}$ و $y''=7$ و $z''=1$ پس دستگاه مفروض دارای دو ریشه است

مثال ۲ — دستگاه معادلات ذیل را حل کنید

$x^2+y^2+z^2+u^2-2yz-3uv+x-y+3u-2=0$

$x+2y-z=1$ و $2y+z-u=1$ و $x+u=4$

و $3=v-u+2u-y-z$ از معادلات درجه اول چنین استخراج میشود

$y=\frac{3-x}{2}$ و $z=2$ و $u=4-x$ و $v=\frac{9-5x}{2}$

و چون بجای y و z و u و v مقادیرشان را در معادله درجه دوم قرار دهیم معادله درجه دوم بحسب x تبدیل میگردد $7x^2-46x+39=0$ و ریشه‌های این معادله عبارتند از $x'=1$ و $x''=\frac{39}{7}$ لهذا دستگاه مفروض

دارای دو جواب باشد از قرار $x'=1$ و $y'=2$ و $z'=3$ و $u'=4$ و $v'=2$ و $x''=\frac{39}{7}$ و $y''=-\frac{9}{7}$ و $z''=2$ و $u''=-\frac{11}{7}$ و $v''=-\frac{22}{7}$

۲ — دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه دویم

۳۷۰ — حل هر دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه دویم بطور کلی راجع شود بیک معادله درجه چهارم یک مجهولی که موافق قواعد مقدماتیه نمیتوان حل نمود مگر در بعضی حالات مخصوصه

مثلاً فرض میکنیم دو معادله دو مجهولی درجه دویم ذیل را

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (1)$$

$$a'x+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0 \quad (2)$$

اگر ضرایب جمله y^2 در هر دو معادله مخالف صفر باشد میتوان y^2 را از هر دو معادله حذف نمود بدینطریق که معادله اول را در c' و معادله ثانی را در c ضرب میکنیم و بعد آنها را عضو بعضو از یکدیگر تفریق میکنیم تا این معادله ذیل نتیجه شود

$$(ac'-ca')x^2+(bc'-cb')xy+(dc'-cd')x+$$
$$+(ec'-ce')y+(fc'-cf')=0 \quad (3)$$

این معادله (۳) با هر یک از دو معادله مفروضه (۱) و (۲) دستگاهی معادل با

دستگاه مفروض منحل بود و محض اختصار کتابت هر کدام از ضرایب معادله (۳) را
مساوی صفر مینمائیم تا آن معادله بصورت ذیل درآید

$$mx^2+nxy+px+qy+r=0 \quad (4)$$

در حالت مخصوص دستگاه
$m=0$ و q هر دو یکمرتبه صفر باشند معادله (۴) را نسبت به y حل میکنیم
و بعد مقدار y را یکی از دو معادله مفروضه (۱) و (۲) نقل میکنیم تا دو
مقدار y بدست آید و لکن حالت کلی هنگامی است که m و q هر دو مخالف صفر
باشند معادله (۴) را میتوان بصورت نوشت

$$y=-\frac{mx^2+px+r}{mx+q} \quad (5)$$

و چون در معادله (۱) بجای y مقدارش
$-\frac{mx^2+px+r}{mx+q}$ را قرار بدهیم معادله ذیل تشکیل میگردد

$$ax^2-bx\frac{mx^2+px+r}{mx+q}+c\left(\frac{mx^2+px+r}{mx+q}\right)^2+$$
$$+dx-e\frac{mx^2+px+r}{mx+q}+f=0 \quad (6)$$

و این معادله (۶) با انضمام معادله (۵) دستگاه معادل با دو معادله (۱) و (۲)
تشکیل میدهد و چون مخارج آن را محو کنیم پس از اختصارات لازمه بصورت یک معادله
یک مجهول درجه چهارم کامل درآید

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0 \quad (7)$$

و این معادله درجه چهارم را کلیه میتوان حل نمود مگر در بعضی حالات مخصوصه مثلا
دستگاه دو مجذوری یا متقارن یا منجر به درجه دوم باشد

مثال — حل کنید دو معادله دو مجهولی درجه دوم زیر را

$$x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0 \quad (1)$$

$$2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0 \quad (2)$$

پس از حذف y^2 این معادله حاصل میشود

$$x^2-10xy+6x-18y+21=0 \quad (3)$$

و این معادله را
باینصورت مینویسیم $y=\frac{x^2+6x+21}{10x+18}$ و چون معادله
(۱) بجای y مقدارش $\frac{x^2+6x+21}{10x+18}$ را قرار دهیم معادله
اختصار معادله دو مجذوری ذیل تشکیل گردد

$$x^4-10x^2+9=0$$

و این معادله با انضمام معادله (۳) معادل است
با دستگاه مفروض و ریشه‌های آن عبارتند از ۱ و ۳ و ۳- و ۱- و چون
این مقادیر را متدرجاً در معادله (۳) بجای x قرار دهیم مقادیر y
چنین شوند ۱ و ۲ و ۱ و ۱- پس دستگاه مفروض دارای چهار جواب است

۳۷۱ — ممکن است اتفاق افتد که طرف اول معادله (۴) مرکب باشد از

دو عامل درجه اول یعنی دو تنکه $mx+p$ و $nx+q$ قابل قسمت باشد
بر $mx+q$ در این صورت معادله مفروضه را میتوان چنین نوشت
$(mx+q)(y+px+r)=0$ و آنوقت دستگاه معادلات (۱)
و (۲) را میتوان تبدیل نمود به دو دستگاه که هر کدام مرکب باشد از یک معادله
درجه دوم و یک معادله درجه اول که میتوان حل نمود مخصوصاً بنظر میآوریم آن
حالتی را که یکی از معادلات مفروضه نسبت به x و y متجانس درجه باشد مثلاً
فرض میکنیم معادله (۱) منجر شود باین صورت $ax^2+bxy+cy^2=0$
چون جمیع حدود را بر y^2 قسمت کنیم بصورت $a(\frac{x}{y})^2+b\frac{x}{y}+c=0$
و چون این معادله نسبت به $\frac{x}{y}$ حل کنیم این دو مقدار نتیجه شوند $\frac{x}{y}=m$
و $\frac{x}{y}=m'$ یا $x=my$ و $x=m'y$ و چون هر کدام از این
دو معادله درجه اول باشند جایها را مفروضه (۲) ترکیب کنیم دو دستگاه
تشکیل شود هر یک مرکب از یک معادله درجه اول و یک معادله درجه دوم مثلاً
فرض میکنیم این دستگاه ذیل را $3x^2+13xy-10y^2=0$ (۱)
(۲) $2x^2+3xy-y^2+x+5y-33=0$
از معادله (۱) چنین حاصل میشود $x=-5y$ و $x=\frac{2}{3}y$ و چون معادله

$x=\frac{2}{3}y$ را با معادله (۲) ترکیب کنیم دو جواب بدست آید $x=2$
و $y=3$ و $x=-3$ و $y=-9$ و همچنین از ترکیب $x=-5y$
با معادله (۲) ایندو جواب نتیجه شود $x=5$ و $y=-1$ و $x=-5$ و
$y=1$ و بالاخره هر گاه دو معادله مفروضه دارای حل درجه اول نباشند
باز موافق قاعده کلی حل منجر شود بمعادله دو مجذوری و اما این حالت را میتوان
تبدیل نمود بحالت مذکوره فوق

۳ شرط اینکه دو معادله یک مجهولی درجه دویم دارای یک ریشه مشترک باشند

۳۷۲ — فرض میکنیم این دو معادله ذیل را

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$
$$a'x^2+b'x+c'=0$$

شرط لازم و کافی برای اینکه
ایندو معادله اقلاً دارای یک ریشه مشترک باشند چنین است

$$R=(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$$

ابتدا فرض میکنیم $a\neq 0$ طرفین معادله اول را در a' و معادله ثانی را
در a ضرب میکنیم و عضو بعضو از یکدیگر میکاهیم پس دستگاه ذیل معادل دستگاه مفروضه تشکیل میکند

$$(2)\quad \begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ (ab'-ba')x+ac'-ca'=0 \end{cases}$$

اولاً اگر $ab'-ba'\neq 0$ معادله ثانی دارای یک جواب منحصر

$x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$ خواهد بود پس برای اینکه دستگاه (۱) و (۲) هر دو دارای یک جواب مشترک باشند لازم و کافی است که این مقدار x ریشه معادله اول هم باشد یعنی

$$a\left(\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}\right)^2 - b\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} + c = 0$$

و این تساوی پس از محو مخرج چنین میشود

$$a(ac' - ca')^2 - b(ac' - ca')(ab' - ba') + c(ab' - ba')^2 = 0$$

و چون در دو جمله اخیر مقدار $(ab' - ba')$ را عامل مشترک قرار دهیم و طرفین را بر a تقسیم کنیم حاصل چنین میشود

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$$

و این مقدار R را منجز دو معادله درجه دوم مفرد خوانند و آنرا بصورت ذیل در آورد که غالباً خیلی مفید است

$$4R = (2ac' - 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = 0$$

ثانیاً فرض میکنیم $ab' - ba' = 0$ پس اگر $ac' - ca' \neq 0$ معادله ثانی دستگاه (۲) جواب نخواهد داشت و اگر $ac' - ca' = 0$ معادله ثانی منجر شود بصورت $0x = 0$ و در اینحالت ریشه های معادله دوم دستگاه (۲) صدق کنند

و آنوقت دستگاه (۱) مرکب باشند از دو معادله که دارای یک ریشه باشند و علاوه بر این ضرایب این دو معادله متناسبند چونکه از دو رابطه $ac' - ca' = 0$ ، $ab' - ba = 0$ این تناسب نتیجه شود $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ و اگر $a = 0$ معادله اول از درجه اول خواهد بود و ریشه اش $-\frac{c}{b}$ و اگر این ریشه در معادله ثانی صدق کند پس $a'\frac{c^2}{b^2} - b'\frac{c}{b} + c' = 0$ و یا چون b^2 مخالف صفر است پس

$$a'c^2 - bb'c + cb'^2 = 0$$

تنبیه — رابطه $R = 0$ در حالت اول مبرهن شد ولیکن معلوم است که اگر فرض کنیم $ab' - ba' = 0$ در اینصورت R منجر شود به $ac' - ca' = 0$ که نظیر است بحالت ثانی و اگر در همین حالت ثانی فرض کنیم $a = 0$ پس R چنین میشود $c^2a'^2 + b^2a'c' - bb'a'c = 0$ یا $a'(a'c^2 - bb'c + cb^2) = 0$ همان رابطه ایست که سابقاً بدست آمده در صورتیکه فرض کنیم $a' \neq 0$

خلاصه شرط لازم و کافی برای اینکه دو معادله که یکی اقلاً از درجه دویم است دارای یک ریشه مشترک باشند آنست که منجز شان صفر باشد و اگر ضرایب

متناسب باشند هر دو معادله دارای ریشه‌های مشترک خواهند بود یا یک ریشه مضاعف و یا هیچ ریشه نخواهند داشت

۳۷۳ — شرط لازم و کافی در ضرایب را برای اینکه هر دو معادله درجه دوم دارای یک ریشه مشترک باشند میتوان بقاعده معرفات قرینه نیز بدست آورد ولیکن ما فقط بذکر قاعده مذکور در فوق اکتفا کردیم

۴ — حل دستگاه معادلات مخصوصه

مسئله ۱ — حل کنید این معادلات را $x+y=a$ و $xy=b$

در فقره ۳۰۹ اشاره شد که x و y عبارتند از ریشه‌های معادله درجه دوم $z^2-az+b=0$ یکی از ریشه‌های این معادله مقدار x است و دیگری مقدار y بنابراین دو دسته جواب ذیل منتج شوند بواسطه تبدیل x و y بیکدیگر

$$\begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

و در حقیقت این دو جواب منجر شوند فقط بیک جواب و همین نکته را در گفتار از معادلات ذیل باید منظور داشت

مسئله ۲ — حل کنید این دستگاه را $x-y=a$ و $xy=b$ چون

قرار دهیم $-y=y_1$ بنابراین نوشت $x+y_1=a$ و $x(-y_1)=-b$ پس x و y_1 ریشه‌های این معادله باشند $z^2-az-b=0$ یکی از ریشه‌ها مثلاً x است و دیگری نمایش مقدار y_1 با علامت مخالف لذا دستگاه مفروض دارای دو جواب باشد و شرط حقیقی بودن ریشه‌ها این است $\frac{a^2}{4}+b\geqq 0$

مسئله ۳ — حل کنید این دستگاه را $x+y=b$ و $x^2+y^2=a$

طرفین معادله ثانی را مجذور میکنیم پس $x^2+y^2+2xy=b^2$ و چون معادله اول را از معادله اخیر عضو بعضو نقصان کنیم حاصل شود $2xy=b^2-a^2$ یا $xy=\frac{b^2-a^2}{2}$ پس x و y عبارتند از ریشه‌های این معادله $z^2-bz+\frac{b^2-a^2}{2}=0$ و دستگاه مفروض دارای دو جواب است

$$\begin{cases} x=\dfrac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \\ y=\dfrac{b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \\ y=\dfrac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \end{cases}$$

مسئله ۴ — حل کنید این دستگاه را $x^2+y^2=a^2$ و $x-y=b$

چون قرار دهیم $-y=y_1$ دستگاه مفروض بدل شود بدستگاه مسئله سابق و بصورت درآید $x^2+y_1^2=a^2$ و $x+y_1=b$ پس x و y_1 عبارتند از ریشه‌های این معادله $z^2-bz+\frac{b^2-a^2}{2}=0$ یکی از ریشه‌ها مانند x است و دیگری نمایش مقدار y_1 و اگر این ریشه‌ها حقیقی باشند دستگاه

مفروض دارای دو جواب خواهد بود

مسئلهٔ ۵ — حل کنید دستگاه را $x+y=b$ و $x^2-y^2=a^2$

پس از حذف y این معادله درجه اول حاصل میشود $2bx-b^2=a^2$

پس دستگاه مفروض فقط یک جواب قبول کند $x=\frac{b^2+a^2}{2b}$

و $y=\frac{b^2-a^2}{2b}$ و این دستگاه را بطریق ذیل هم میتوان حل نمود چون

$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ پس اگر طرفین دو معادله مفروضه را عضو

بعضو بر یکدیگر تقسیم کنیم حاصل شود $\frac{a^2}{b}=x-y$ و چون این معادله را با

$b=x+y$ ترکیب کنیم همان جواب سابقه بدست آید و بهمین طریق نیز میتوان

دستگاه $\begin{cases} x^2-y^2=a^2 \\ x-y=b \end{cases}$ را حل نمود

مسئلهٔ ۶ — این دستگاه را حل کنید $x^2+y^2=a$ و $xy=b$ چون طرفین

معادله ثانی را در ۲ ضرب کنیم و هر دو معادله را عضو بعضو بر یکدیگر بیفزائیم و از یکدیگر

بکاهیم دستگاه ذیل حاصل شود $(x+y)^2=a+2b$ و $(x-y)^2=a-2b$

و پس از استخراج جذر از طرفین $x+y\pm\sqrt{a+2b}$ و $x-y\pm\sqrt{a-2b}$

و از آنجا $x=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}\right)$

و $y=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}\right)$ و چون علامات جبری را بجمیع طرق

ممکنه ترکیب کنیم چهار مقدار برای x و چهار مقدار برای y نتیجه میشود که دستگاه

مفروض چهار جواب قبول کند و شرط حقیقی بودن ریشه‌ها اینست $a+2b>0$

و $a-2b>0$ و از آنجا $a>0$ و $a^2-4b^2>0$

تنبیه ۱ — دستگاه مفروض $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ xy=b \end{cases}$ را بطریق ذیل

نیز میتوان حل نمود چون طرفین معادله ثانی را مجذور کنیم دستگاه مفروض مبدل شود

بدستگاه جدید که عمومیتش بیشتر است $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x^2y^2=b^2 \end{cases}$ (۲) پس x^2 و y^2

عبارتند از ریشه‌های معادله درجه دویم $z^2-az+b^2=0$ بنابراین

x و y در چهار مقدار خواهند بود $\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}$ و $\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}$

و باید متذکر بود که تقسیم معادله $x^2y^2=b^2$ بیشتر از $xy=b$ زیرا که معادله

با دو معادله $xy=b$ و $xy=-b$ لهذا دستگاه $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ xy=-b \end{cases}$ (۳)

نیز معادل میگردد و از هشت جواب دستگاه (۲) چهار جواب متعلقه بدستگاه (۱) و چهار

جواب دیگر تعلق گیرند بدستگاه (۳) و این جواب بهمین همان جواب سابقه است هرچند

بصور مختلفه باشند مثلاً $\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right)$

صحت این رابطه را بواسطه قاعدهٔ تبدیل مذکوره در نمره ۳۴۳ میتوان تحقیق نمود

تنبیه ۲ — برای حل دستگاه مفروض (۱) باز ممکن است مقدار y را

از معادلهٔ ثانی استخراج کرده و در معادلهٔ اولی نقل نمود تا معادله دو مجهولی در می‌آید که میتوان حل نمود

مسئلهٔ ۷ — حل کنید این دستگاه را $xy=b$ ، $x^2-y^2=a$ چون بقاعدهٔ تبدیل مقدار y را حذف کنیم معادله دو مجهولی $x^4+ax^2-b^2=0$ تشکیل میشود که دارای دو ریشهٔ حقیقی است $x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}$

و برای تعیین y چون مقدار x را حذف کنیم حاصل میشود $y^4+ay^2-b^2=0$

و این معادله نیز دارای دو ریشهٔ حقیقی است $y=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}$ علامت y را دلخواه ما باید طوری اختیار نمود که حاصل ضرب xy بعلامت a باشد

و اما این دستگاه را میتوان تبدیل نمود بدستگاه مسئلهٔ فوق بدو این تساوی

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2$$ و بعد

$(x^2+y^2)^2=a^2+4b^2$ و از آنجا $x^2+y^2=\sqrt{a^2+4b^2}$

مسئلهٔ ۸ — حل کنید این دستگاه را $\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=b^3 \end{cases}$ این دستگاه را میتوان بصورت ذیل تبدیل نمود $x+y=a$ ، $(x+y)^3-3xy(x+y)=b^3$ و یا $x+y=a$

$xy=\frac{a^3-b^3}{3a}$ پس x و y عبارتند از ریشه‌های این معادله

$z^2-az+\frac{a^3-b^3}{3a}=0$ که فقط یک جواب قبول کند

مسئلهٔ ۹ — حل کنید این دستگاه را $\begin{cases} x+y=a \\ x^4+y^4=b^4 \end{cases}$

این دستگاه را بدستگاه ذیل تبدیل میکنیم $x+y=a$ ،

$(x+y)^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2=b^4$

یا $a^4-4xy\left[(x+y)^2-2xy\right]-6x^2y^2=b^4$ ، $x+y=a$

یا $2x^2y^2-4axy+a^4-b^4=0$ ، $x+y=a$

و از این معادلهٔ اخیره میتوان مقدار $xy=z$ را استخراج نمود پس x و y ریشه‌های این معادله باشند $z^2-az+\frac{a^2-b^2}{2}=0$ و بهمین طریق سهل میتوان دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ x^5+y^5=b^5 \end{cases}$ را حل نمود

مسئلهٔ ۱۰ — حل کنید این دستگاه را $x^3+y^3=a$ و $xy=b$ چون طرفین معادلهٔ ثانی را مکعب کنیم چنین میشود $b^3=x^3y^3$ پس x^3 و y^3 عبارتند از ریشه‌های این معادله $z^2-az+b^3=0$ و بهمین طریق سهل میتوان هر دستگاه کلی $x^m+y^m=a$ ، $xy=b$ را حل نمود و اگر m زوج باشد ریشه‌های خارجی در معادله داخل میشوند که تشخیص آنها نیز سهل است

مسئلهٔ ۱۱ — حل کنید این دستگاه را $x+y+z=2a$

$x^2+y^2=p^2$ ، $xy=2m^2$ طرفین معادله دوم را در ۲ ضرب کرده

برساده کردن با اول تفاضل بدست آید $(x+y)^2+p^2+4m^2$

و چون بجای $x+y$ مقدارش $2p-p$ را قرار دهیم چنین میشود

$(2p-p)^2=p^2+4m^2$ یا $pp=p^2-m^2$ و از آنجا

$p=\frac{p^2-m^2}{p}$ پس x و y را میتوان از روی این دستگاه ذیل

بدست آورد $xy=2m^2$ ، $x+y=2p-p=\frac{p^2+m^2}{p}$

یعنی x و y عبارتند از ریشه‌های این معادله $X^2-\frac{p^2+m^2}{p}X+2m^2=0$

و این دستگاه مفروض نظیر است بمسئله هندسی ذیل معلوم کنید اضلاع مثلث قائم‌الزاویه

که محیطش $2p$ و سطحش معادل با مربعی که بضلع m باشد

امثله متعلق بفصل شانزدهم

۱ — دستگاه معادلات ذیل را حل کنید

$$\begin{cases} 3x+y=15 \\ x^2-3y^2=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y^2+3x^2=30752 \\ 9y-5x=324 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ 3x^2-2y^2=67 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2+2y^2=813 \\ 7x-4y=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x-8y=15 \\ 2x^2-xy+4y^2=252 \end{cases}$$

بعد از ۱۸ سال اصل و فرع مجموعاً بمبلغ زیر سرمایه در صورتیکه منافع را آخر هر ششماهه بر

جمله قرار دهیم — باید در فرمول (۵) چنین قرار داد $R=0.0225$

، $n=36$ پس جواب چنین میشود $A=12654^{\text{تومان}}$

۲ — در چه مدت سرمایه کذا قرار نرخ ۵ پنج برابر مرکب معادل شود اصل و فرع مجموعاً

معادل میشود با سه برابر سرمایه در صورتیکه منافع را آخر هر ششماهه تجدید کنیم

۳ — در نفوس مکتی امروزه ۱۴۵۲۸۷۴۰ نفر است تحقیق شده که هر سال

بقدر $\frac{1}{100}$ جمعیت ابتدای همان سال بر عدهٔ نفوس افزوده میشود پس جمعیت بیست

بعد از ۲۰ سال چقدر خواهد شد

۲ — قسط التسنین و امثله عددیه

۴۲۳ — **تعریف** — قسط التسنین عبارتست از مبلغ ثابتی که شخص بعهده

میگیرد که هر سال بپردازد تا چند سال یعنی خواه برای تشکیل سرمایه و خواه برای استهلاک

دین هر چند قسط التسنین عموماً باید ثابت باشد لیکن در بعضی اوقات ممکنست بر وفق قاعده

معینی تغییر کند مثلاً افتاده سنویه طبق تصاعد حسابی یا هندسی باشند و علاوه بر این

میتوان منافع را هر سال یا هر ششماه یا هر سه ماه و غیره بسرمایه جدید قرار داد و همچنین

قسط التسنین را در آخر هر ششماه یا هر سه ماه و غیره پرداخت

۴۲۲ — **تشکیل سرمایه بواسطهٔ قسط السنین** — هرگاه در ابتدای هر سال مدت n سال مبلغ ثابت a تومان بعنوان قسط السنین از قرار نرخ r در صد مرکب معاوضه شود میخواهیم بدانیم سرمایهٔ کل A که بعد از انقضای n سال تشکیل میشود برابر چه مبلغ است قسط السنین اول a که در ابتدای سال اول در مدت n سال بریع مرکب معاوضه شود بعد از n سال میرسد بمبلغ $a(1+r)^n$ و قسط السنین دوم که از ابتدای سال دوم تا $n-1$ سال در مرابحه مرکب باشد در انتهای n سال میرسد بمبلغ $a(1+r)^{n-1}$ و قسط سوم که از اول سال سوم تا $n-2$ سال بریع مرکب داده شود در انتهای n سال خواهد رسید بمبلغ $a(1+r)^{n-2}$ و همچنین قسط آخر فقط یکسال در مرابحه خواهد ماند و در آخر سال میشود $a(1+r)$ پس سرمایهٔ کل A در انتهای n سال عبارت باشد از مجموع مبالغی که از اقساط مسنویه بالا منافع آنها حاصل شود پس این تساوی نتیجه میشود

$$A = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \dots + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n$$

طرف ثانی این تساوی مساویست با حاصل جمع جمله مسلسلی که جملهٔ اولش $a(1+r)$ و قدر نسبتش $(1+r)$ باشد پس

$$A = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{(1+r) - 1}$$

یا

$$A = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r} \qquad (۴)$$

و بصورت لگاریتم چنین میشود:

$$\lg A = \lg a + \lg(1+r) + \lg\left[(1+r)^n - 1\right] + \operatorname{colg} r$$

ولیکن این فرمول بکار نمیخورد مگر در نسبت زیر که عددی $\left[(1+r)^n - 1\right]$ مستقیماً معلوم است پس باید $(1+r)^n$ را بوسیلهٔ لگاریتم و طریق دیگر حساب کرد $(1+r)^n - 1$ تکمیل ۱ عدد مقدار A را با عمل ساده تری تعیین کرد

مثال ۱ - هرگاه شخصی در ابتدای هر سال مبلغ ۱۲۵ تومان از قرار ۲٫۵ در صد در ۱۰ سال بریع مرکب داده میخواهیم بدانیم بعد از ده سال چه مبلغ عاید او میشود

$a = ۱۲۵$ ، $n = ۱۰$ ، $r = ۰٫۰۲۵$ ابتدا $(1+r)^n$ را حساب میکنیم

$\lg(1+r) = ۰٫۰۱۰۷۲۳۹$ ، $\lg 1{,}025 = ۰٫۰۱۰۷۲۳۹$

در آخر پس از حساب لگاریتم میشود $(1+r)^n = ۱٫۲۸۰۰۸$ و $(1+r)^n - 1 = ۰٫۲۸۰۰۸$

پس $\lg A = \lg ۱۲۵ + \lg ۱٫۰۲۵ + \lg ۰٫۲۸۰۰۸ + \operatorname{colg} ۰٫۰۲۵$

$\lg a = ۲٫۰۹۶۹۱۰۰$

$\lg(1+r) = ۰٫۰۱۰۷۲۳۹$

$\lg\left[(1+r)^n - 1\right] = \bar{1}٫۴۴۷۲۸۲۱$

$\operatorname{colg} r = ۱٫۶۰۲۰۶۰۰$

$\lg A = ۳٫۱۵۶۹۷۶۰$ ، $A = ۱۴۳۵٫۴۱$ تومان

مثال ۲ - چه مبلغ باید در اول هر سال بریع مرکب داد تا بعد از ۵ سال با نرخ ۵ در صد مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان عاید شود

از فرمول (۱) چنین استخراج میشود $a=\frac{Ar}{(1+r)[(1+r)^n-1]}$

و یا $a=\frac{Ar}{(1+r)^{n+1}-(1+r)}$ و بصورت لگاریتم چنین میشود

$$\lg a=\lg A+\lg r-\lg(1+r)-\lg[(1+r)^n-1]$$

ابتدا مقدار $(1+r)^{15}$ را بطریق لگاریتم حساب میکنیم خواهیم داشت $1{,}05^{15}=2{,}07892$

پس $\lg x=\lg 0{,}0000+\lg 0{,}05-\lg 1{,}05-\lg 1{,}07892$

و از آنجا $\lg a=3{,}3437584$ پس $a=2204{,}78$

۴۲۵ — **تبصره** — چون تعیین A مستقیماً بطریق لگاریتم چندان سهل نیست در عمل

در محض سرعت محاسبات جدولی مانند جداول بهره مرکب ترتیب داده شده مقدار

مضروب $\frac{(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$ را برای مقادیر متداول r و n

در آنها ضبط است چنانچه در سالنامه‌های فرانسه مقادیر این مضروب برای نرخهای

r از ۰٫۰۱۵ الی ۰٫۰۵ بفواصل ۰٫۰۰۵ از یک الی صد سال نوشته

شده و اما در بانکها و در ادارات مالیه جداول مفصل‌تر استعمال کنند

مثال — هرگاه مبلغ ۱۰۰۰ تومان در اول هر سال از قرار ۴ بر بهره مرکب داده

شده و بعد از ۲۵ سال سرمایه‌گذار چه مبلغ میرسد مقدار عددی مضروب فوق را در

سالنامه تفحص میکنیم $\frac{1{,}04^{15}-1}{0{,}04}=41{,}645908$ پس مبلغ مطلوب

$A=1000\times 41{,}645908\times 1{,}04=43311{,}44$ تومان

۴۲۶ — فرمول (۱) شامل چهار مقدار A و a و r و n است چنانکه

اگر سه تای از آنها معلوم باشد میتوان مقدار چهارم را استخراج نمود پس در مسائل

قسط استنین چهار حالت مختلفه طرح میشود هرگاه A یا a مجهول باشد مسئله را مانند

دو مثال مذکور میتوان بدون اشکال حل نمود و اما وقتیکه r مجهول باشد مسئله بواسطه

اعمال مقدماتی همواره قابل حل نیست زیرا که اگر $x=(1+r)$ را مجهول مسئله

فرض کنیم فرمول (۱) بصورت ذیل درآید

$$A=\frac{ax(x^n-1)}{x-1}=a(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^2+x)$$

پس برای تعیین x این معادله تشکیل میگردد

$$ax^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+ax^2+ax-A=0$$

این معادله کاملاً از درجه n است که بطریق مقدماتی نمیتوان حاصل نمود وقتیکه n

از ۲ تجاوز کند و علاوه بر این هیچوقت این مسئله در عملیات اتفاق نیافتد چونکه نرخها

در ممالک متمدنه همواره ثابت است مع ذلک وقتیکه r بحسب اتفاق مجهول باشد آنرا

بمدد جداول نرخها یا بقاعده تقریبات متوالیه معلوم میکنیم

مثال ۳ — از قرار چه نرخی باید اول هر سال مبلغ a تومان بگیرد

گذاشت تا بعد از n سال مبلغ A تومان باید شود

معادله سابقه را باین صورت مینویسیم

$$A=a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots\cdots+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^n$$

چون فرض کنیم $r=0$ طرف ثانی چنین میشود an و این مقدار باید کوچکتر از A باشد چون A مرکب است از an باضافه منافع اقساط a پس اگر r مثبت باشد مبلغ ترقی کند طرف ثانی متدرجاً زیاد میشود و اگر مقدار غیر محسوسه تغییر یابد پس یک مقدار منحصری برای r یافت میشود که در معادله صدق کند لهذا برای تعیین مقدار تقریبی r بجای آن متدرجاً اعداد ۰٫۰۱ و ۰٫۰۲ قرار میدهیم فرض میکنیم طرف ثانی بازاء $r=3$ کوچکتر از A باشد و بازاء $r=4$ بزرگتر از آن پس r واقع باشد باین ۳ و ۴ و آنوقت بجای r عدد ۳٫۵ قرار میدهیم اگر حاصل بزرگتر از A باشد r واقع گردد باین ۳ و ۳٫۵ و چون مقادیر ۳٫۱ و ۳٫۲ و ۳٫۳ و ۳٫۴ را متدرجاً قرار دهیم r تا $\frac{1}{10}$ تقریب اضافی و نقصانی بدست میآید و چون همین طریق پیش رود مقدار r با تقریب مطلوب استخراج میشود و اگر فرمول (۱) بصورت ذیل قرار دهیم محاسبات مختصر میشود

$$\frac{A}{a}=\frac{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}=\frac{(1+r)^{n+1}-(1+r)}{r}$$

مثلاً اگر فرض کنیم

$a=2000$ و $A=95596{,}25$ و $n=20$

و خواهیم r را معلوم کنیم بنا بر این اختیار میکنیم $r=0{,}04$ طرف اول

مساوی میشود $\frac{95596{,}25}{2000}=32{,}78125$

و طرف ثانی میشود $\frac{1{,}04^{21}-1{,}04}{0{,}04}=30{,}9692$ چون طرف

ثانی کوچکتر است از طرف اول پس r خیلی کوچک است فرض میکنیم $r=0{,}05$

آنوقت می‌بینیم بعکس طرف ثانی بزرگتر است از طرف اول پس معلوم میشود که نرخ مطلوب

باید کوچکتر از ۰٫۰۵ باشد یعنی باین ۰٫۰۴ و ۰٫۰۵ پس فرض میکنیم $r=0{,}045$

باز می‌بینیم که طرف ثانی بزرگتر است از طرف اول لهذا باید r واقع شد باین

۰٫۰۴ و ۰٫۰۴۵ و اگر فرض کنیم $r=0{,}045$ طرفین تقریباً مساوی میگردند

پس نرخ مطلوب مساویست با ۴٫۵۰

۴۲۷ — هرگاه n مجهول باشد باید جواب عدد صحیح باشد والا مسئله غیر ممکن است

و اما وقتیکه n کسری باشد میتوان به a یا به A مقداری معین نمود که n

عدد صحیح باشد و این مسئله را بعد جداول نرخها میتوان بسهولت حل کرد و کافیست

که در ستون نظیر نرخهای r آن مقداری از n را تفحص نمود که بازاء آن مقدار

کسر سیون $\frac{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}$ مساوی $\frac{A}{a}$ باشد و بعمل کار تمام

بسیار سهل است از فورمول (۱) چنین استخراج کنیم

$$(1+r)^n = \frac{Ar + a(1+r)}{a(1+r)}$$ و از آنجا

$$n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a - \log(1+r)}{\log(1+r)}$$

یا بدین صورت $n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a}{\log(1+r)} - 1$

فورمول (۱) بصورت ذیل نیز میتوان در آورد

$$\log[(1+r)^n - 1] = \log A + \log r + \log a + \log(1+r)$$

و مقدار $[(1+r)^n - 1]$ را چون حساب کنیم مقدار $(1+r)^n$ معلوم میگردد

مثلاً فرض میکنیم $(1+r)^n = x$ پس $n = \frac{\log x}{\log(1+r)}$ و اگر خارج قسمت عدد صحیح نماند خوب مسئله تقریبی خواهد بود و توقف مقدار n را صاحب جزء صحیح خارج قسمت خشنود میکنیم

مثال - هرگاه اول هر سال مبلغ ۲۰۰۰ تومان بربح مرکب گذاریم و فرض ۴٫۵ باشد بعد از چند سال میتوان مبلغ ۶۵۵۶۶٫۲۵ تومان عاید داشت

چون در فورمول $n = \frac{\log[Ar + (1+r)] - \log a}{\log(1+r)} - 1$ بجای حروف مقادیر عددیه شان قرار دهیم چنین میشود

$$n = \frac{\log(65566{,}25 \times 0{,}045 + 2000 \times 1{,}045) - \log 2000}{\log 1{,}045} - 1$$

پس $n = \frac{\log 5046{,}481 - \log 2000}{\log 1{,}045} - 1$ و $n = \frac{3{,}7029 - 3{,}3010300}{0{,}0191163} = 20$

و از آنجا $n = 20$ پس مدت مطلوب ۲۰ سال است

مثال - هرگاه اول هر سال مبلغ ۱۲۰۰ تومان بربح مرکب گذاریم از قرار ۴٪ بعد از چند مدت میتوان مبلغ ۳۰۰۰۰ تومان عاید داشت

در فورمول $n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a - \log(1+r)}{\log(1+r)}$

بجای حروف مقادیر عددیه مفروضه را قرار بدهیم

$$n = \frac{\log(30000 \times 0{,}04 + 1200 \times 1{,}04) - \log 1200 - \log 1{,}04}{\log 1{,}04}$$

$$Ar + a(1+r) = 30000 \times 0{,}04 + 1200 \times 1{,}04 = 2448$$

$$n = \frac{\log 2448 - \log 1200 - \log 1{,}04}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}2925969}{0{,}0170333}$$

و پس از عمل تقسیم معلوم میشود که عدد n وقت مابین ۱۷ و ۱۸ پس این مسئله با معلومات مفروضه فوق غیر ممکن است ولیکن میتوان معلوم نمود که چه قسط سنتین باید مرکب گذاشت تا بعد از ۱۷ یا ۱۸ سال مبلغ ۳۰۰۰۰ تومان سرمایه عاید شود

و یا اینکه با ۱۷ یا ۱۸ قسط سنتین ۱۲۰۰ تومان مبلغ سرمایه میستوان تحصیل نمود

حساب معلوم میشود که با ۱۷ قسط سنتین ۲۱۷٫۲۷ تومان مبلغ ۳۰۰۰۰ تومان عاید میشود و همین مبلغ را میستوان با ۱۸ قسط سنتین ۱۱۲۴٫۸۱ حاصل نمود و از طرف دیگر با ۱۷ قسط سنتین ۲۰۰ تومان مبلغ ۲۹۵۷۴٫۴۷ تومان عاید میشود

و باجزای قسط سنین در ۸ سال مبلغ ۳۲۰۰۵٫۳۶ تومان حاصل میشود

۴۲۸ - تنخواه فعلی - تنخواه فعلی V عبارت است از مبلغی که چون آنرا فقط یکمرتبه در ابتدای سال اول بسود مرکب گذاریم بعد از انقضای n سال برسد بهمان مبلغی که از قسط السنین a در n سال حاصل میشود پس از این تعریف رابطهٔ ذیل حاصل میشود $V(1+r)^n = a(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$

و از آنجا $V=\frac{a}{r}(1+r)\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$ و نسبت مدتهای فرانسه بطوریکه ثابت شد که مقادیر $(1+r)\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$ بانازای مقادیر مختلفه r و n در آنها ضبط است

۴۲۹ - تبصره - هرگاه در مسئلهٔ قسط السنین اقساط سالیانه در آخر هر سال پرداخته شود در اینصورت هر قسط a یک سال کمتر در مرابحه مرکب خواهد ماند مثلاً قسط اول $n-1$ سال و قسط دوم $n-2$ سال در مرابحه خواهد بود و یکقسط اخیر هیچ نفع نخواهد داشت پس مجموع کل اقساط مستوی یا نظام منافعشان این بنا می نموده میشود $A=a+a(1+r)+a(1+r)^2+\dots\dots+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-1}$

و بموجب طرف ثانی حاصل جمع جمل تصاعد هندسی است پس فرمول کلی قسط السنین چنین میشود

$A=a\frac{(1+r)^n-1}{r}$ (۲) چون این فرمول مانند فرمول (۱) مستعمل لگاریتم قابل حل نیست لهذا برعت و سهولت محاسبات عملیات بعد اولی از مقادیر متداولهٔ $\frac{(1+r)^n-1}{r}$ ترتیب داده اند یعنی سرمایه که از قسط السنین یک تومان در آخر هر سال بعد از n سال بنرخ r حاصل شود چنانکه یکی از این جداول در سالنامه فرانسه ضبط است و جمع مطالب و حالات مذکوره در فرمول (۱) بلا بعینه در فرمول (۲) بکنیم و هرگاه سه تای از چهار مقدار A و a و r و n معلوم باشند میتوان مقدار چهارم را استخراج نمود پس از اینجا چهار مسئله مختلف طرح میشود که آنها را بهمان طریق مسائل مابقه قسط السنین حل میکنیم

۴۳۰ - وقتیکه اقساط مستوی در آخر هر سال پرداخته شود فرمول تنخواه فعلی چنین میشود $V=\frac{A}{(1+r)^n}$ یا $V=\frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$

امثله

۱- هرگاه شخصی در آخر هر سال ۱۲۵۰ تومان از قرار پنج بر بیست بسود مرکب گذارد بعد از ۲۰ سال چه مبلغ عاید او میشود (اجواب) ۳۷۲۲۳ تومان

۲- حساب کنید مبلغ قسطی که آخر هر سال از قرار ۴٫۵ بر پانصد بسود مرکب گذارد

تا بعد از ۱۵ سال مبلغ ۲۴۰۰۰ تومان سرمایه کل باید شود (ج. ۱۱۵۴۰۷۰ تومان)

۳ـ هرگاه در آخر هر سال مبلغ ۱۴۰۰ تومان از قرار ۳٫۵ بهره مرکب معامله شود پس از چند مدت مبلغ ۴۵۲۶۰ تومان باید فراهم شد (ج) ۲۱ سال

۴ـ از قرار چه نرخی در آخر هر سال مبلغ ۱۱۵۰ تومان بهره مرکب گذاریم بعد از ۲۵ سال مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان باید میشود (جواب) ۴٫۲۵ بهره

استهلاک دین و مسئله عددیه

۴۳۱ ـ استهلاک دین عبارت از اینست که شخص مدیون مبلغ دین را بتدریج باقساط متساویه بپردازد تا بکلی مستخلص شود

مثلاً فرض میکنیم شخص مبلغ A تومان از قرار نرخ r بهره مرکب قرض کند این قرض بعد از m سال میرسد بمبلغ $A(1+r)^m$ تومان که باید بطلبکار داده شود و اما اگر شخص مدیون بخواهد این مبلغ را بقسط آنچنان در m سال متوالیه بتدریج مستهلک نماید اقساط متساویه a که در آخر سال اول و سال دوم و ... و سال m ام پرداخته میشوند مجموعاً یک سرمایه تشکیل میدهند مساوی با $a\frac{(1+r)^m-1}{r}$ (نمره ۴۲۹) و بنابفرض باید این مبلغ برابر شود با $A(1+r)^m$ یعنی مبلغ قرض بعد از m سال مساویست با مبلغ سرمایه که در همان مدت از مجموع اقساط

حاصل میشود پس $A(1+r)^m = a\frac{(1+r)^m-1}{r}$ (۱)

و از آنجا $a = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m-1}$ (۲) و غالباً این فرمول را صرفاً بصورت ذیل در آورده استعمال میکنند $a = A\frac{r}{1-\frac{r}{(1+r)^m}}$

هرگاه در فرمول (۱) سه تای از چهار مقدار a و A و m و r معلوم باشند میتوان مقدار چهارم را استخراج نمود

مثال ۱ـ شخصی مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان از قرار نرخ ۴ درصد قرض نموده و میخواهد در مدت ۲۵ بقسط السنین مستهلک سازد مطلوب است مبلغ هر قسط در فرمول (۲)

چنین قرار دهیم $A = 50000$ و $r = 0{,}04$ و $m = 25$

و ابتدا باز از مقادیر r و m مقدار $(1+r)^m$ را بدو لگاریتم حساب میکنیم $(1+r)^m = 2{,}6658$ و بعد ترتیب چنین حاصل میشود $\frac{r}{(1+r)^m-1} = 0{,}0240$ پس $a = 50000 \times 2{,}6658 \times 0{,}0240$

و از آنجا $a = 3200{,}60$ تومان

مثال (۲) چه مبلغ است قرضی که میتوان آنرا در ۲۴ بقسط السنین ۱۵۰۰ تومان از قرار $4\frac{1}{2}$ درصد مستهلک نمود

از فرمول (۱) چنین استخراج کنیم $A = \frac{a\left[(1+r)^m-1\right]}{r(1+r)^m}$

و چنین فرض میکنیم $a=1500$ ، $r=0{,}045$ ، $n=34$

و ابتدا بدون لگاریتم مقدار $(1+r)^n$ را حساب میکنیم $(1+r)^n=4{,}4664$

و از آنجا $A=1500\times\frac{3{,}4664}{4{,}4664\times 0{,}045}$ و پس از محاسبه بود

لگاریتم یا بطریق دیگر چنین نتیجه میشود $A=25870$

۴۳۲ - هرگاه n مجهول باشد فرمول $A(1+r)^n=a\frac{(1+r)^n-1}{r}$

را باین صورت مینویسیم $(1+r)^n(a-Ar)=a$

و از طرفین لگاریتم میگیریم $n\,lg(1+r)+lg(a-Ar)=lg\,a$

و از آنجا $n=\frac{lg\,a-lg(a-Ar)}{lg(1+r)}$ و از این فرمول ظاهر است

که اگر $a-Ar$ منفی باشد مسئله محال است چونکه اعداد منفی لگاریتم ندارد

و علاوه بر این چون Ar سنت مبلغ استقراضی A است پس بدیهی است که اگر

قسط سنه a کوچکتر از Ar باشد بدهی قرض متراکم میشود بلکه رفته رفته بر آن افزوده میشود

و باید مقدار n عدد صحیح باشد و الا مسئله با معلومات مفروضه غیر ممکن است

مثال ۴ - در چه مدت میتوان مبلغ ۱۰۰۰۰۰ تومان قرض را استهلاک نمود

در صورتیکه سالی مبلغ ۸۸۶۹٫۹۰ تومان قسط استهلاکی از قرار ۵ درصد داده کنیم

در فرمول $n=\frac{lg\,a-lg(a-Ar)}{lg(1+r)}$ چنین فرض میکنیم

$a=8869{,}9$ ، $A=100000$ ، $r=0{,}05$ پس حاصل میشود

$$n=\frac{lg\,8869{,}9-lg\,2869{,}9}{lg\,1{,}05}=\frac{0{,}3960\,21}{0{,}0211\,9}=18$$

۴۳۳ - وقتیکه r مجهول باشد چون معادله (۱) را بصورت صحیح آوریم

نسبت بمجهول r از درجه $(n+1)$ خواهد بود و مقدار r را از روی

آن نمیتوان مستقیماً استخراج نمود ولیکن بوسیله امتحانات متوالیه میتوان برای

r یک مقداری با هر قدر تقریب که بخواهیم بدست آورد و پس ابتدا از فرمول

(۱) باین صورت درآوریم $\frac{a}{A}=\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ و بسهولت

میتوان دید که طرف اول معادله فوق ترقی میکند وقتیکه عدد مثبت r موکد

پس هرگاه مقداری برای r فرض کرده در $\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ قرار دهیم

اگر حاصل این اکسپرسیون بزرگتر از $\frac{a}{A}$ باشد معلوم میشود که مقدار مفروضه r خیلی

بزرگ است و اگر برخلاف کوچکتر از $\frac{a}{A}$ باشد r خیلی کوچک است و چون

بهمین طریق امتحان پیش رویم میتوان دو عدد یافت که اختلافشان از یکدیگر اندک

باشد که بخواهیم و شامل عدد مطلوب r باشد و چون فرض کنیم که $a-Ar$

بالضروره مثبت است پس r باید کوچکتر از $\frac{a}{A}$ باشد لهذا امتحانات

لازمه را میتوان در اعداد کوچکتر از $\frac{a}{A}$ قرار داد

مثال ۴ – مرآتی باین شرط پول قرض میدهد که مبلغ استقراضی در ۲۵ قسط بتدریج پرداخته شود و هر قسط سنه برابر باشد با $\frac{1}{15}$ اصل مبلغ استقراضی پس از قرار چه نرخی سود میگیرد

در اینجا $n=25$ و $\frac{a}{A}=\frac{1}{15}=0.0666$ و عدد r بایستی که کوچکتر است از $\frac{a}{A}$ یعنی از 0.0666 ابتدا عدد 0.05 را امتحان میکنیم مقداری عدد $\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ چنین میشود 0.07 این عدد بزرگتر است از 0.0666 پس معلوم میشود که 0.05 خیلی بزرگ است و حال 0.04 را امتحان میکنیم مقدار عددی کسر سیون فوق چنین میشود 0.0632 این عدد کوچکتر است از 0.0666 پس 0.04 خیلی کوچک است و از اینجا استنباط میکنیم که r واقع است مابین 0.04 و 0.05 پس 0.045 را امتحان میکنیم مقدار عدد $\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ میشود 0.0667 این عدد بزرگتر است از 0.0666 پس 0.045 خیلی بزرگ است و r واقع است مابین 0.04 و 0.045 و باز 0.0425 را امتحان میکنیم مقدار کسر سیون فوق میشود 0.0663 این عدد کوچکتر است از 0.0666 پس 0.0425 خیلی کوچک است و r واقع است مابین 0.0425 و 0.045 لهذا نرخ مطلوب واقع است مابین $4\frac{1}{4}$ و

$4\frac{1}{2}$ و اگر تقریب بزرگتر بخواهیم بهمین طریق پیش میرویم

۲۳۴ – تبصره – اولاً هرگاه فورمول (۲) را باین صورت درآوریم $a\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right)=Ar$ و فرض کنیم $n=\infty$ مقدار $\frac{1}{(1+r)^n}$ صفر میشود و $a=Ar$ یعنی قسط ایشان a برابر باشد با Ar منفعت مبلغ استقراضی A پس در اینصورت قرض ابداً استهلاک نمیشود و این حالت در مسائل عایدات دائم الحیات اتفاق میافتد

ثانیاً در فورمول (۲) فرض میکنیم $r=0$ پس $a=\frac{A}{n}$ ولیکن این اسم مطلب است برای رفع آن فورمول را باین صورت می نویسیم $a=\frac{Ar(1+r)^n}{r\left(\frac{(1+r)^n-1}{r}\right)}$ و اما کسر سیون $\frac{(1+r)^n-1}{r}$ عبارتست از حاصل جمع حدود هندسی ذیل

$$1:(1+r):(1+r)^2:\ldots\ldots(1+r)^{n-2}:(1+r)^{n-1}$$

پس رابطه فوق چنین نوشته میشود

$$a=\frac{Ar(1+r)}{r\left[1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-1}\right]}$$

و حال اگر ابتدا عامل مشترک r را از دو جمله کسر حذف نماییم و بعد فرض کنیم $r=0$ صورت کسر میشود A و مخرجش n مرتبه 1 یا n پس $a=\frac{A}{n}$ یعنی اگر در مسئله استقراض نفع منظور نشود باید در سال مبلغ $\frac{A}{n}$ قسط از خود تادیه

[illegible] پرداخته شود

۲۵۴ — تبصرهٔ ۲ — هرگاه در مسئلهٔ قسط‌السنین فرض کنیم هر قسط سالیانه از اصل و بهره پرداخته شود و سرمایه‌ها در هر ششماه تجدید شود در این حالت اگر [illegible] هر قسط ششماهه را a فرض کنیم و نرخ یک تومان را در ششماه r و عدد اقساط ششماهه را n باز چنین خواهیم داشت

[illegible] $A = a\frac{(1+r)^{2n}-1}{2}$ زیرا اینجا $\frac{r}{2}=r$ و $\frac{r}{2}=a$ و $2n=m$

پس [illegible] چنین میشود $A = a\frac{(1+\frac{r}{2})^{2n}-1}{r}$

امثله

۱ — اگر صد تومان به آخر هر سال مبلغ ۴۰۰۰ تومان قسط‌السنین داده شود با مبلغ ۲۰۳۰۲٫۷۵ تومان [illegible] نرخ ۵ درصد مستهلک شود

۲ — [illegible] ۲۰۰۰۰ تومان قسط‌السنین قرار ۵ درصد ۸ سال ادا کنیم و قرضی را مستهلک [illegible] کرد

۳ — شخصی مبلغ ۱۵۰۰۰ تومان از قرار ۵ درصد قرض نموده و میخواهد تا ۱۲ سال آنرا بکلی مستهلک سازد پس در آخر هر سال چه قسطی باید ادا کند

۴ — شخصی بواسطهٔ ادای ۱۰ قسط‌السنین ۱۷۸۰٫۳۵ تومان میخواهد خود را از ۲۰۰۰۰ تومان قرض مستخلص سازد مطلوب است نرخ مرابحه

مقالهٔ پنجم
مشتقات و تغییر معرفت
فصل بیست و دوم
مشتقات
۱ — حدود

۴۳۴ — تعریف هرگاه [illegible] x [illegible] α [illegible] است و [illegible] x میل کند [illegible] ε [illegible] که بخواهیم [illegible] α [illegible] جمیع مقادیر x که در نامساوی $|x-\alpha|<\varepsilon$ صدق کنند مقادیر [illegible] از α در نامساوی $|\alpha-x|<\varepsilon$ صادق باشد (اگر باز $\alpha=x$ شود) مثلاً هر قوهٔ مثبت x از x صفر است وقتیکه x میل کند بجهت صفر زیرا اگر نامساوی $|x|<\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ محقق باشد نامساوی $|x^n|<\varepsilon$ نیز باید محقق خواهد بود و در اینجا عدد α مساویست با $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$

تعریف مزبور را میتوان بعبارت ساده ذیل چنین ادا نمود مقادیر متغیرهٔ x را میتوان آنقدر نزدیک به α گرفت که اختلاف x از α [illegible]

کوچکتر شود که بخواهیم (چونکه میتوان ε را بی نهایت کوچکتر انتخاب نمود)
مقدار y که حدش b است میتواند بزرگتر شود از هر حد ثابتی کوچکتر از b و کوچکتر
شود از هر حد مثبتی بزرگتر از b چونکه مقدار y محصور خواهد بود بین $b+\varepsilon$ و
$b-\varepsilon$ (ε میتواند آنقدر کوچکتر شود که بخواهیم)

۴۳۷ — معرف y را گوییم بینهایت ترقی میکند وقتیکه x بی انتها باشد اگر چنانچه
یک عدد مثبت اختیاری A (آنقدر بزرگتر که بخواهیم) قبلاً موجود باشد بتوان یک عدد
مثبت دیگر α یافت چنانکه بازاء جمیع مقادیر x که در نامساوی $|x|>\alpha$
صدق کنند مقادیر نظایرشان از y نیز در نامساوی $|y|>A$ صادق آیند
(اگر بازاء $x=\alpha$ شاید)

باید دانست که چون y بینهایت ترقی کند عکسش $\frac{1}{y}$ میل میکند بسمت صفر و بالعکس

مثال — هر قوهٔ منفی x^{-m} از x بینهایت ترقی میکند وقتیکه x میل کند بسمت
صفر زیرا که نامساوی $|x|<\frac{1}{A^{\frac{1}{m}}}$ محقق باشد نامساوی $|x^{-m}|>A$
نیز محقق خواهد بود و بعد A $(|x^{-m}|>A$ و در اینجا عدد α مساویست با $A^{-\frac{1}{m}}$
تعریف مزبور را میتوان بعبارت سادهٔ ذیل ادا نمود هرگاه مقادیر x
بینهایت نزدیک شوند به α مقادیر مطلقهٔ y آنقدر بزرگتر

میشوند که بخواهیم یعنی از هر عدد مثبت A که قبلاً معلوم باشد تجاوز میکنند —
y میتواند بدو طریق بینهایت ترقی کند اگر مثبت باشد بحسب مقادیر مثبته
و اگر منفی باشد بحسب مقادیر منفیه

۴۳۸ — عدد معرف y گوییم b است وقتیکه x بینهایت ترقی کند اگر چنانچه
یک عدد مثبت ε (آنقدر کوچک که بخواهیم) قبلاً معلوم باشد بتوان یک عدد مثبت
A یافت چنانکه بازاء جمیع مقادیر x که در نامساوی A $(|x|>A$ صدق کنند
مقادیر نظایرشان از y نیز در نامساوی $|y-b|<\varepsilon$ صادق آیند

مثال — هرگاه x بینهایت ترقی کند هر قوهٔ منفی x^{-m} میل میکند بسمت صفر زیرا
برای محقق بودن نامساوی $|x^{-m}|<\varepsilon$ کافی است که $|x|>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{m}}}$ نیز
محقق باشد و در اینجا عدد A مساویست با $\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{m}}}$

تعریف فوق را میتوان چنین ادا نمود مقادیر مطلقهٔ x را میتوان آنقدر بزرگتر
گرفت که اختلاف y از b آنقدر جزئی باشد که بخواهیم

۴۳۹ — معرف y را گوییم بینهایت ترقی میکند وقتیکه x بینهایت ترقی
کند اگر چنانچه یک عدد مثبت P (آنقدر بزرگتر که بخواهیم) قبلاً معلوم باشد بتوان
یک عدد مثبت A یافت چنانکه بازاء جمیع مقادیر x که در نامساوی A $(|x|>$

حد می‌کنند مقادیر نظایرشان از y نیز از نامساوی $P(y)$ صادق آیند

مثال هر قوه مثبت x از x بینهایت ترقی میکند وقتیکه x بینهایت ترقی کند زیرا اگر نامساوی $P(x)$ محقق باشد نامساوی $P(x^{\frac{1}{n}})$ نیز محقق خواهد بود و در اینجا حد A نظیر P مساویست به $P^{\frac{1}{n}}$

تعریف مزبور را چنین ادا کنیم میتوان مقادیر x را آنقدر بزرگتر گرفت که مقادیر نظایرشان از y نیز بحسب مقدار مطلق آنقدر بزرگتر باشد که بخواهیم

۴۳۰ — قضیه — هرگاه دو معرف از x بازاء جمیع مقادیر x متساوی باشند دو حد شان نیز متساوی خواهند بود وقتیکه x میل کند بسمت a

فرض میکنیم y و z دو معرف از x بازاء جمیع مقادیر x همواره متساوی باشند (مگر بازاء $x=a$ شاید) چون b را حد y فرض کنیم بنا بتعریف اگر چنانچه یکعدد مثبت ε قبلاً معلوم باشد باید یک عدد دیگر α توان یافت که از نامساوی $|x-a|<\alpha$ نامساوی $|b-y|<\varepsilon$ نتیجه شود و چون بفرض $z=y$ پس بازاء همان مقادیر x نامساوی $|b-z|<\varepsilon$ نیز محقق خواهد بود لهذا b حد z نیز است

تبصره — باعانت قضیه فوق میتوان مقدار حقیقی هر کسر مبهم را بدست آورد مثلاً هرگاه کسری بازاء $x=a$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید مقدار حقیقی آن عبارتست

از حد این کسر وقتیکه x میل کند بسمت a پس گوئیم یک کسر ثانی بدست آورد که بازاء جمیع مقادیر x (مگر $x=a$) مساوی کسر مفروض باشد حدش نیز مساوی کسر خواهد بود بازاء $x=a$ و چون این کسر ثانی بازاء $x=a$ مبهم نیست پس اگر متصل باشد حدش محققاً همان مقدار خواهد بود که بازاء $x=a$ اختیار میکند پس بموجب قضیه مزبوره این حد عبارتست از مقدار حقیقی کسر مفروض

مثال کسر $\frac{x^2+3x}{x^3-x}$ بازاء $x=0$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ نموده میشود و چون این مساویست با کسر $\frac{x+3}{x^2-1}$ بازاء جمیع مقادیر x مگر بازاء $x=a$ پس بنا بقضیه فرد ۴۲۱ چنین نتیجه میشود $\text{حد}_{x=0}\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right)=-3$ $\text{حد}_{x=0}\left(\frac{x^2+3x}{x^3-x}\right)=$ پس مقدار حقیقی کسر مفروض بازاء $x=0$ مساویست با -3

۴۲۱ — قضیه آ — حد حاصل جمع جبری چند معرف از x که هر یک دارای حدی باشد وقتیکه x میل کند بسمت a مساویست با مجموع حدود آن جمل

فرض میکنیم سه معرف y و z و u مرتباً دارای حدود b و c و d باشند وقتیکه x میل کند بسمت a میخواهیم ثابت کنیم که حد حاصل جمع $y+z+u$ مساویست با $b+c+d$ چون حدود y و z و u مرتباً مساویند با b و c و d پس بنا بتعریف سابق هرگاه یکعدد مثبت ε قبلاً معلوم باشد میتوان

سه عدد مثبت α_1 و α_2 و α_3 بدست آورد چنانکه از نامساویهای $|x-a|<\alpha_1$ و $|x-a|<\alpha_2$ و $|x-a|<\alpha_3$ از تساوی بیابیل نتیجه شود $|b-d|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|c-d|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|c-b|<\frac{\varepsilon}{3}$ و چون کوچکترین سه عدد α_1 و α_2 و α_3 را فرض کنیم از نامساویهای $|x-a|<\alpha$ نتیجه نامساویهای ذیل نتیجه شود $|x-a|<\alpha_1$ و $|x-a|<\alpha_2$ و $|x-a|<\alpha_3$ و بعد سه نامساوی $|b-d|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|c-b|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|c-d|<\frac{\varepsilon}{3}$ و چون این سه نامساوی اخیر را عضو بعضو با یکدیگر جمع کنیم چنین میشود $|b-d|+|c-b|+|c-d|<\varepsilon$ و چون مقدار مطلق هر حاصل جمعی اکثراً مساویست با مجموع مقادیر مطلقه اجزاء آن پس $|b-d|+|c-b|+|c-d|\geqslant|b+c+d-(b+c+d)|$ و بعد باز از جمیع مقادیر x که نامساوی $|x-a|<\alpha$ محقق باشد بطریق اولی چنین فرض داشت $|b+c+d-(b+c+d)|<\varepsilon$ پس از اینجا چنین استنتاج میشود که عدد $(b+c+d)$ مساویست با $(b+c+d)$ حاصل جمع حدود اصل

قضیه ۲ — هرگاه در حاصل ضرب چند عامل یکی از عوامل میل کند بسمت صفر و هر یک از عوامل دیگر بحسب مقدار مطلق کوچکتر از عدد ثابتی باشد حاصل ضرب نیز میل میکند بسمت صفر

فرض میکنیم عامل b میل بصفر باشد و بنابفرض چون هر یک از عوامل دیگر بحسب مقدار مطلق

کوچکتر از عدد ثابتی پس حاصل ضربشان بحسب مقدار مطلق کوچکتر خواهد بود از عدد ثابت P و برای اینکه عدد حاصل ضرب کل صفر باشد باید اگر چنانچه عدد مثبت معلوم باشد بتوان یک عدد دیگر α یافت که اگر نامساوی $|x-a|<\alpha$ محقق باشد مقدار مطلق حاصل ضرب کوچکتر شود از ε و این ممکنست زیرا که چون x میل کند بسمت صفر میتوان α را طوری انتخاب نمود که از نامساوی $|x-a|<\alpha$ نامساوی $|b|<\frac{\varepsilon}{P}$ نتیجه شود پس مقدار مطلق حاصل ضرب کل که مساویست با حاصل ضرب مقادیر مطلقه عواملش کوچکتر خواهد بود از $P\cdot\frac{\varepsilon}{P}=\varepsilon$

قضیه ۳ — عدد حاصل ضرب چند معرف که هر یک دارای حدی باشند وقتیکه x میل کند بسمت a مساویست با حاصل ضرب حدود عوامل

اولاً فرض میکنیم حاصل ضرب دو عامل y و z را که حدشان بترتیب b و c باشد وقتیکه x میل کند بسمت a و میخواهیم ثابت کنیم که حد حاصل ضرب yz مساویست با bc کافی است ثابت کنیم که تفاضل $bc-yz$ میل میکند بسمت صفر زیرا چنین مینویسیم $bc-yz=y(b-c)+c(b-y)$ و از اینجا ظاهر است که این تفاضل عبارتست از مجموع دو مقدار $y(b-c)$ و $c(b-y)$ که حدشان صفر است چونکه هر یک مرکب است از حاصل ضرب عامل ثابتی یا کوچکتر از عدد ثابتی

در عامل دیگر که حدش صفر است (قضیه ۲) و بعد بموجب قضیه ۱ حد $(bc-ad)$ وقتیکه x میل کند بسمت a مساویست با مجموع حدود حاصل آن یعنی صفر لهذا حد xy مساویست با bc حاصل ضرب حدود عواملش

ثانیاً فرض میکنیم چهار حرف y و z و t و u که هر یک دارای حدود b و c و d و e باشند وقتیکه x میل کند بسمت a و بنا بر حالت اول حد حاصل ضرب xy مساویست با bc و چون z xy را حاصل ضرب دو عامل xy و z تصور کنیم و اندکی تأمل استدلال نماییم حد حاصل ضرب xyz میشود bcd و چون بهمین طریق $uxyz$ را حاصل ضرب دو عامل xyz و u فرض کنیم حد این حاصل ضرب عبارتست از حاصل ضرب حدود عامل یعنی $bcde$ و بهمین طریق میتوان حد حاصل ضرب هر عدد از عوامل را معلوم نمود مشروط بر اینکه حد عوامل محدود باشد

قضیه ۴ — هرگاه صورت کسری میل کند بسمت صفر و مخرجش بحسب مقدار مطلق بزرگتر از یک عدد ثابتی باشد آن کسر میل میکند بسمت صفر

فرض میکنیم کسر $\frac{y}{z}$ خارج قسمت دو حرف از x باشد و وقتیکه x میل کند بسمت a صورت y میل شود بصفر و اما z بحسب مقدار مطلق بزرگتر از عدد ثابت g باشد

یعنی $|z| > g$ و از اینجا ظاهر است که $\frac{1}{z}$ کوچکتر است از عدد ثابتی پس میتوان $\frac{y}{z}$ را حاصل ضرب دو عامل تصور کرد که یکی از آنها صفر و دیگری $\frac{1}{z}$ محدود باشد بنابراین حد این خارج قسمت صفر است (قضیه ۲)

قضیه ۵ — هرگاه در خارج قسمت دو حرف از x صورت و مخرج دارای حدی باشند و حد مخرج مخالف صفر باشد حد خارج قسمت مساویست با خارج قسمت حدود

فرض میکنیم $\frac{y}{z}$ خارج قسمت دو حرف از x باشد و چون x میل کند بسمت a حد y مساوی b باشد و حد z مساوی c $(c \neq 0)$ پس ثابت میکنیم که حد $\frac{y}{z}$ مساویست با $\frac{b}{c}$ برای اثبات تفاضل $\frac{y}{z} - \frac{b}{c}$ را چنین مینویسیم

$$\frac{c(y-b)-b(z-c)}{cz} = \frac{y}{z} - \frac{b}{c}$$

و از اینجا ظاهر است که این تفاضل مساویست با خارج قسمت دو مقدار که اولی $c(y-b)-b(z-c)$ حد آن صفر است وقتیکه x میل کند بسمت a (چونکه مرکبست از حاصل جمع دو مقدار که هر کدام بایل است بصفر) و دوم cz که حدش مخالف صفر است و بحسب مقدار مطلق بزرگتر از یک عدد ثابتی پس حد تفاضل $\frac{y}{z} - \frac{b}{c}$ صفر است (قضیه ۴) یعنی حد $\frac{y}{z}$ مساویست با $\frac{b}{c}$

قضیه ۶ — هرگاه معرفی از x دارای حدی باشد (مثبت یا صفر) وقتیکه

x میل کند بحد a حد جذر این معرف مساویست با جذر حد آن

فرض میکنیم $\lim$ حد معرف y باشد وقتیکه x میل کند بحد a و باز از مقادیری از x که خیلی نزدیک به a باشد y بعلامت $\lim$ یعنی مثبت است پس از آن میتوان جذر حسابی استخراج نمود و آنگاه رابطه‌ی $\sqrt{y}-\sqrt{z}=\frac{y-z}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ صادق است که تفاضل $\sqrt{y}-\sqrt{z}$ مساویست بکسری که صورتش میل میکند بصفر و مخرجش از کسر است از $\sqrt{z}$ پس این تفاضل میل میکند بصفر (قضیه ۲۰) بنابراین حد $\sqrt{y}$ مساوی است با $\sqrt{z}$ وقتیکه x میل کند به a

تبصره — وقتیکه $\lim$ صفر باشد دلیل فوق صحیح نیست و اگر حد y صفر باشد میتوان α را طوری انتخاب نمود که از ازای هر x ($|x-a|<\alpha$) $|y|<\varepsilon$ میشود (ε عدد یست مثبت که قبلاً موجود باشد) و تا آنوقت چنین خواهد بود

۲) $\lim y$ و از اینجا ظاهر است که حد y صفر است

تنبیه — در جمیع قضایای مذکوره فوق فرض کردیم که معرفات مفروضه حدشان باشد وقتیکه x میل کند به a و فرض کنیم که x بنهایت ترقی کند باز این قضایا محقق خواهند بود

۴۴ — قضیه ۱ — هرگاه در مجموع چند جمله فقط یک جمله بنهایت ترقی کند

و جمله‌ی بحسب مقدار مطلق بزرگتر از اعداد ثابته باشند حاصل جمع مفروض نیز بنهایت ترقی میکند

فرض میکنیم آن جمله که بنهایت ترقی میکند y باشد و حاصل جمع جبری جمله دیگر را z مینامیم و چون بفرض جمیع جمله z معلوم و محدود هستند پس z نیز معلوم و محدود خواهد بود و میتوان یک عدد مثبت M بدست آورد که z بحسب مقدار مطلق از آن تجاوز نکند ولی چون $|y|-|z|<|y+z|$ (قضیه ۱) پس اگر یک عدد α طوری انتخاب کنیم که باز از ازای هر x ($|x-a|<\alpha$) $|y|>M$ این نامساوی نتیجه شود $|y+z|>P$ (P عدد یست مثبت و معلوم) بطریق اولی نامساوی ذیل نیز محقق خواهد بود $|y+z|>P+A-A$ یا $|y+z|>P+A$ پس $y+z$ بنهایت ترقی میکند وقتیکه x میل کند بحد a

تبصره — قضیه فوق محقق نگردد اگر وقتیکه فقط یکی از جمله حاصل جمع مفروض بنهایت ترقی کند و از اینستوان پی بحکمی نمود بخصوص جمله‌ی که بنهایت ترقی میکند یک کسر باشد و در چنین حالت باز حاصل جمع بنهایت ترقی میکند مثلاً تفاضل دو عدد مثبت که هر دو بنهایت ترقی کنند میتواند برای یک حد معینی باشد چنانچه $\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}$ همواره مساویست با ۱ مع ذلک وقتیکه

x میل کند بصفر هر یک از عوامل بینهایت ترقی میکند و در اینصورت حالت ابهام رخ میدهد که آنرا باین رمز $\infty - \infty$ مینمائیم

قضیهٔ ۲ — هرگاه در حاصل ضرب چند عامل یکی از آن عوامل بینهایت ترقی کند و هر یک از عوامل دیگر بحسب مقدار مطلق بزرگتر از یک عدد ثابتی باشد حاصل ضرب بینهایت ترقی میکند

فرض میکنیم آن عامی که بینهایت ترقی میکند y باشد وقتیکه x میل کند به a و حاصل ضرب جمیع عوامل دیگر را z مینامیم و چون هر یک از عوامل z بزرگتر از عدد ثابتی پس میتوان یک عدد مثبت η بدست آورد که مقدار مطلق z بزرگتر باشد از η و عدد و براین چون y بینهایت ترقی میکند پس اگر یک عدد مثبت A در دست باشد میتوان یک عدد مثبت دیگر α تعیین نمود که اگر نامساوی $|x-a|<\alpha$ محقق باشد چنین نتیجه شود $|y|>\frac{A}{\eta}$ و چون $\eta<|z|$ پس باز در همان مقادیر x چنین خواهیم نوشت $|yz|>A$ بنابراین yz بینهایت ترقی میکند وقتیکه x مایل به a باشد

تبصره — هرگاه یکی از عوامل حاصل ضرب میل کند بصفر قضیه مزبوره صحیح نیست چونکه حاصل ضرب هر عامل که بینهایت ترقی کند در عامل دیگر که میل بصفر باشد

مبهم است باین صورت $0 \times \infty$

مثلاً حاصل ضرب $x^{-g} \times x^{h}$ تا ثابت x در قوه منفی آن وقتیکه x مایل بصفر باشد بصورت ابهام فوق در آید که میتوان بآسانی رفع نمود زیرا که چون حاصل ضرب را باین صورت بنویسیم x^{h-g} اگر $g>h$ پس $h-g<0$ و در اینحالت x^{h-g} و x هر دو میل میکنند بصفر و اگر $g=h$ چنین حاصل میشود $x^{h-g}=1$ و بالاخره اگر $g<h$ پس $h-g>0$ و در اینصورت x^{h-g} بینهایت ترقی میکند وقتیکه x مایل بصفر باشد

قضیهٔ ۳ — هرگاه مخرج کسری میل کند بصفر و صورتش بحسب مقدار مطلق بزرگتر از یک عدد ثابتی باشد آن کسر بینهایت ترقی میکند

فرض میکنیم کسر $\frac{y}{z}$ که z صفر باشد وقتیکه x میل کند به a و چون یک عدد مثبت η بدست آورد که مقدار مطلق y بزرگتر از آن باشد و از طرف دیگر تصور میکنیم یک عدد مثبت A قبلاً موجود باشد و چون z میل کند بسمت صفر میتوان یک عدد دیگر α بدست آورد که از نامساوی $|x-a|<\alpha$ نامساوی ذیل نتیجه شود $|z|<\frac{\eta}{A}$ و چون علاوه براین $\eta<|y|$ پس باز در همان مقادیر x چنین خواهیم داشت $|\frac{y}{z}|>A$ و بنابراین $\frac{y}{z}$ بینهایت ترقی میکند

وقتیکه x مایل به a باشد

تبصره — برای اینکه قضیه فوق صحیح باشد باید صورت کسر مایل بصفر نباشد و

کسر بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید و ما سابق قاعده رفع این ابهام را در حالت عدد ثابت ذکر داشتیم

نتیجه — عکس هر مقدار مایل بصفر بینهایت ترقی میکند

قضیه ۴ — هرگاه مخرج کسری بینهایت ترقی کند و صورتش بحسب مقدار معلوم

کوچکتر از یک عدد ثابتی باشد آن کسر میل میکند بصفر

فرض میکنیم در کسر $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ که x مقدار $f(x)$ محدود باشد و $f(x)$ بینهایت ترقی کند

میخواهیم ثابت کنیم که این کسر میرسد بصفر

یک عدد مثبت A میتوان تعیین نمود که $|f(x)| > A$ از طرف دیگر فرض میکنیم $\varphi(x)$

مثبت معلوم باشد و چون $f(x)$ بینهایت ترقی کند میتوان یک عدد مثبت α یافت بطوریکه

از نامساوی $|x-a| < \alpha$ چنین نتیجه شود $|f(x)| > \frac{A}{\varphi}$ آنوقت باید

چنین فهمیم داشت $\frac{\varphi}{f} < \frac{\varphi}{\frac{A}{\varphi}}$ یا $\frac{\varphi}{f} < \frac{\varphi^2}{A}$ و از اینجا ظاهر است که $\frac{\varphi}{f}$

میل میکند بصفر وقتیکه x مایل به a باشد

نتیجه — هرگاه صورت کسری بینهایت ترقی کند و مخرجش بحسب مقدار معلوم

کوچکتر از یک عدد ثابتی باشد این کسر بینهایت ترقی میکند زیرا که عکس این کسر موجب قضیه

فوق میل میکند بصفر و بعد چون این کسر عکس مقدار مایل بصفر است پس بینهایت ترقی میکند

تبصره — هرگاه در جمله کسری بینهایت ترقی که حالت ابهام رخ میدهد باین

صورت $\frac{\infty}{\infty}$ مثلا خارج قسمت $\frac{x^2}{x}$ و در آن همیشه از x بصورت بهام

بر خورد آید وقتیکه x بینهایت ترقی کند ولیکن رفع این ابهام خیلی سهل است زیرا

اگر در بصورت $\frac{x^2}{x}$ قرار دهیم میتوانند بینهایت ترقی کند یا مساوی واحد باشد

یا میل کند بصفر بحسب آنکه x بزرگتر یا مساوی و یا کوچکتر از x باشد

تنبیه — جمیع حالات ممکن الوقوع در حاصل جمع و حاصل ضرب و خارج

قسمت معرفه‌ئیکه مایل بحدی باشند یا بینهایت ترقی کنند مذکور داشتیم و دیدیم

که چهار صورت ابهام $\infty - \infty$ و $\infty \times 0$ و $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ممکن است اتفاق افتد و در

اغلب حالات میتوان این ابهامات را بیکدیگر تبدیل نمود تا رفع آنها سهل باشد

مثال — هر کثیر الجمله صحیح بحسب x که دارای جمله ثابت نباشد میل میکند بصفر

وقتیکه x مایل بصفر باشد

چون کثیر الجمله دارای جمله ثابت نیست حد جمیع اجزاء آن صفر است پس حد خود

کثیر الجمله نیز صفر میشود (قضیه نمره ۲۴) و با تعریف حد اگر بازاء $x=0$

کثیر الجمله $p(x)$ صفر باشد میتوان یک عدد مثبت α یافت که بازاء جمیع مقادیر x

که بحسب مقدار مطلق کوچکتر از ε باشند این نامساوی نتیجه شود $|P(x)|<\varepsilon$

(ε عددیست مثبت که قبلاً معلوم باشد)

مثال ۲ هر کثیرالجمله صحیح بحسب x بنهایت ترقی میکند هنگامیکه x بنهایت ترقی کند و بازاء بزرگترین مقادیر x علامت جمله بزرگترین نماینده خواهد بود مثلاً در کثیرالجمله $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+f$ جمله x^4 را عامل مشترک قرار میدهیم $P(x)=x^4\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}+\frac{f}{x^4}\right)$ هنگامیکه x بنهایت ترقی کند هر یک از اجزاء پرانتز میل میکند بصفر مگر جمله اول (نمره ۲۴۲ قضیه ۴) پس حد مقدار داخل پرانتز میشود a (مخالف صفر) و اما عامل اول بنهایت ترقی میکند پس حاصل ضرب $P(x)$ نیز بنهایت ترقی خواهد کرد (نمره ۲۴۲ قضیه ۲) و علاوه بر این چون حد مقدار داخل پرانتز a است میتوان x را آنقدر بزرگتر گرفت تا اختلاف این مقدار با حدش آنقدر جزئی باشد که بخواهیم و بعلامت a باشد لذا کثیرالجمله بازاء این مقادیر x بعلامت جمله بزرگترین نماینده ax^4 خواهد بود از آنچه مقدم شد نتیجه چنین میشود که هر کثیرالجمله $P=ax^m+bx^{m-1}+\cdots$ را میتوان بصورت $P=ax^m(1+\varepsilon)$ قرار داد و حد ε صفر است هنگامیکه x بنهایت ترقی کند

مثال ۳ معلوم کنید مقدار حقیقی کسر منطق از x را هنگامیکه x بنهایت ترقی کند چون هر کسر منطق بحسب x خارج قسمت دو کثیرالجمله صحیح میباشد پس هنگامیکه x بنهایت ترقی کند این کسر بصورت ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ درآید مثلاً فرض میکنیم کسر ذیل را $\frac{P}{Q}=\frac{ax^m+bx^{m-1}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots}$ و چون قرار دهیم $P=ax^m(1+\varepsilon)$ و $Q=a'x^n(1+\varepsilon')$ (ε و ε' میل میکنند بصفر هنگامیکه x بنهایت ترقی کند) پس $\frac{P}{Q}=\frac{ax^m}{a'x^n}\times\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}$ چونکه حد $\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}$ و $(1+\varepsilon)$ واحد است چنانکه میتوان گفت $(1+\varepsilon)=\frac{ax^m}{a'x^n}$ و اما اگر $m<n$ چنین میشود $\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'}x^{m-n}(1+\varepsilon)$ که $m-n$ منفی پس $\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'}(1+\varepsilon)$ و اگر $m>n$ چنین قرار میدهیم $\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'x^{n-m}}(1+\varepsilon)$ و از اینجا چنین استنباط میشود که هرگاه درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج باشد کسر بنهایت ترقی میکند هنگامیکه x بنهایت ترقی کند و اگر درجات هر دو جمله متساوی باشند حد کسر مخالف صفر است و مساوی با خارج قسمت ضرایب جمله های بزرگترین نماینده صورت و مخرج و بالاخره اگر درجه صورت کوچکتر از مخرج باشد حد کسر صفر میشود

و علاوه بر این میتوان حد کسر را نیز بنحو ذیل معلوم نمود که هر دو جمله آنرا بزرگترین قوه x که در یکی از دو جمله موجود باشد قسمت نمود و بعد x بنهایت ترقی

و آنوقت هر یک از جمل دارای حدی خواهد بود که یکی اقلاً مخالف صفر باشد
مثلاً کسر $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ بنهایت ترقی میکند وقتیکه x بنهایت ترقی کند چونکه
درجه صورت بزرگتر است از درجه مخرج و تا حد کسر $\frac{x^4+2x+6}{4x^4+x^2+5}$ مساوی است
با $\frac{1}{4}$ چونکه درجات هر دو جمله برابرند

مثال ۴ حالا برای رفع ابهامیکه بصورت $\infty-\infty$ باشد کسر سیون مفروض
ضرب و قسمت کنند بر مزدوجش

اولاً مقدار حقیقی $x+2-\sqrt{x^2-5x+1}$ را بازاء $x=+\infty$ معلوم کنید چون
آنرا بر مزدوجش قسمت کنیم باینصورت در آید $\frac{9x+3}{x+2+\sqrt{x^2-5x+1}}$ و این کسر جدید
بازاء $x=+\infty$ بصورت $\frac{\infty}{\infty}$ در میآید و چون دو جمله آنرا بر x قسمت کنیم
چنین میشود $\frac{9+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}$ وقتیکه x بنهایت ترقی کند حد صورت میشود
۹ و حد مخرج $1+1+\sqrt{1}=2$ پس مقدار حقیقی کسر مفروض مساویست با $\frac{9}{2}$
ثانیاً حد $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$ را معلوم کنید وقتیکه x بحسب مقادیر بیشتر ترقی کند
آنرا باین صورت مینویسیم $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$
و این کسر جدید صورت ثابت و مخرج بنهایت ترقی میکند پس حد کسر سیون
مفروض صفر است .

۲ — اتصالات

۴۴۳ — تعریف — معرف $y=f(x)$ را بازاء $x=a$ متصل گوئیم
صورتیکه اولاً بازاء $x=a$ دارای حد معینی باشد ثانیاً وقتیکه x میل کند به
a حد معرف همان مقدار باشد که بازاء $x=a$ اختیار کرده است مثلاً
معرف $\sqrt{x}$ بازاء هر مقدار مثبتی از x متصل است زیرا که بازاء $x=a$ دارای
یک حد معین $\sqrt{a}$ است و وقتیکه x میل کند به a حد $\sqrt{x}$ میشود $\sqrt{a}$ که
همان مقداریست که بازاء $x=a$ اختیار کرده است

جمیع قضایائیکه در خصوص حدود مذکور داشتیم نظایر شان جمیعاً در معرفات متصله
موجودند و ما در ذیل اکتفا کنیم فقط باثبات قضیه اول و بذکر احکام قضایای دیگر

۴۴۴ — قضیه ۱ — حاصل جمع جبری چند معرف متصل موقعیت متصل
فرض میکنیم معرفات متصله y و z و t و u بازاء $x=a$ مرتباً مقادیر
b و c و d و e را اختیار کنند یعنی وقتیکه x میل کند به a معرفات y
و z و t و u بر مسند بحدود شان b و c و d و e پس (بموجب قضیه (فقره ۴۴۱))
حد حاصل جمع $u+t+z+y$ میشود $e+d+c+b$ لذا $u+t+z+y$
معرفیست متصل بازاء $x=a$

قضیه ۲ — حاصل ضرب چند معرف متصل بازاء $x=a$ معرف متصل بازاء $x=a$ (قضیه ۳ فره ۲۴۱)

نتیجه — هر قوهٔ صحیح و مثبت از معرف متصل معرف متصل

مثال ۱ هر کثیر المجموع صحیح بحسب x درجه ثابت از مجموع جملهٔ بصورت ax^m است و هر یک از این جمل معرف متصل است چون قوت از معرف متصل بنداکثیر المجموع معرف متصل خواهد بود

قضیه ۳ — خارج قسمت دو معرف متصل بازاء $x=a$ معرف متصل نشود برانکه بازاء این مقدار $x=a$ مخرج صفر نباشد

زیرا که چون حد مخرج مخالف صفر است میتوان قضیه ۵ را (فره ۲۴۱) تطبیق نمود

قضیه ۴ — جذر هر معرف متصل بازاء $x=a$ معرف متصل (قضیه ۶ فره ۲۴۱)

مثال ۲ - هر کسر منطق بحسب x معرف متصل بازاء هر مقداری از x که مخرج آنرا صفر نکند چونکه هر کسر منطق خارج قسمت دو کثیر المجموع صحیح یعنی خارج قسمت دو معرف متصل است پس بنا بر قضیه ۳ کسر مفروض بازاء هر مقداری از x که مخرج صفر نکند متصل است.

مثال ۳ جذر هر کثیر المجموع صحیح بحسب x معرف متصل بازاء هر مقداری از

x که مقدار تحت رادیکال را مثبت کند (قضیه ۴)

اشکال — معرفات ذیل متصلند مگر بازاء آنقادیری از x که مخارج را صفر کنند و یا مقادیر تحت رادیکال را منفی نمایند ax^2+bx+c و $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ و $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$ و $(x+1)(x+2)(x+3)$ و $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x^2-2x+1}$

۲۲۵ — تعریف — هرگاه متغیر x از مقدار a تغییر کرده برسد به a' مقدار $a'-a$ را نمو x نامیم و آنرا چنین مینامیم $h=a'-a$ یا $a'=h+a$ و چون فرض کنیم y معرفی از x باشد و y و مقداری از y باشد که بازاء a و a' حاصل شده پس نمو $(y'-y)$ تغییر میشود به $y'-y=k$ نمو معرف و باید دقت برد که نمو ممکن است مثبت یا منفی باشد

مثال ۱ معرف $y=x^2-5x+2$ بازاء $x=3$ میشود $y=-4$ و بازاء $x=2.5$ میشود $y=-6.25$ پس متغیر میشود $h=2.5-3=-0.5$ و نمو تغییرش از معرف میشود $k=-6.25+4=-0.25$

مثال ۲ - در معرف $y=ax^2+bx+c$ چون یک نمو به x دهیم نمو تغییرش از معرف میشود k پس بازاء مقدار جدید متغیر $x+h$ مقدار تغییرش از معرف

شود $y+k$ یعنی $y+k=a(x+h)^2+b(x+h)+c$ و بعد

$$k=a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c$$

$$k=h(2ax+b+ah)$$

۴۴۶ - قضیه - شرط لازم و کافی برای اینکه معرفی بازاء $x=a$ متصل باشد آنستکه اگر ابتدا از a یک نمو h به x داده شود نمو نظیرش k از معرف میل کند بصفر وقتیکه h مایل بصفر باشد

فرض میکنیم y بازاء $x=a$ مساوی b باشد مقصود از اتصال معرف آنستکه اگر x میل کند به a مد y مساوی شود به b بنابراین $b-y$ یعنی k میل میکند بصفر وقتیکه x یعنی h مایل بصفر باشد و بالعکس اگر $k=y-b$ و $x=a+h$ هر دو با هم میل کنند بصفر مد y مساوی b خواهد بود وقتیکه x میل کند بصفر و معرف متصل است

حکم این قضیه را میتوان تعریف اتصال قرار داد که هیچ اختلافی با تعریف سابق ندارد و علاوه بر این دقایق اتصال از روی این تعریف بهتر مفهوم میشود زیرا که چون h و k هر دو با هم مایل بصفر شوند میتوان h را آنقدر کوچکتر گرفت تا k بحسب مقدار مطلق آنقدر کوچکتر شود که بخواهیم یعنی از طرفی وقتیکه معرف بازاء $x=a$ متصل باشد میتوان x را بقدر از a آنقدر کمتر و غیر محسوس تغییر داد تا معرف نیز آنقدر کمتر و غیر محسوس تغییر کند که بخواهیم یعنی معرف نتواند یک مرتبه از مقداری بمقدار دیگر بگذرد و

ممکن است معرف با مقداری از x متصل نباشد یعنی در برای مقدار رسمی باشد و آنگاه از مقداری بمقدار دیگر بگذرد مثلاً $\frac{1}{x}$ با جمیع مقادیر x متصل است مگر بازاء $x=0$ که یکمرتبه از $-\infty$ بگذرد بر $+\infty$ و منفصل میشود

هرگاه معرفی با جمیع مقادیر x محصور و در فاصله معینی متصل شد چون بدون محسوس تغییر نتواند از مقداری بمقدار دیگر بگذرد بدون سیر جمیع مقادیر متوسط بنابراین معرف متصل تغییر حالت نکند مگر اینکه از صفر بگذرد زیرا که برای گذشتن از مثبت بمنفی باید قبلاً صفر شود و بالعکس معرفی که شامل مضاعفات باشد میتواند از مقداری بمقدار دیگر برسد بدون سیر مقادیر متوسط

۳ - مشتقات معرفات بسیطه

۴۴۷ - تعریف - فرض میکنیم y معرفی از x باشد $(y=f(x))$ و چون یک نمو h به متغیر x داده شود معرف نیز یک نمو k حاصل میکند پس اگر نسبت $\frac{k}{h}$ دارای حدی باشد وقتیکه h میل کند بصفر این حد را مشتق معرف نامند

$$\lim\left(\frac{k}{h}\right)=\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

پس مشتق معرف عبارتست از حد نسبت نمو معرف به نمو متغیر وقتیکه نمو متغیر میل کند بسمت صفر پس از این تعریف بلا واسطه چنین استنباط میشود که هر معرفی بازاء مقدار

از حد مشتق قبول نکند مگر وقتیکه بازاء آن منفصل باشد زیرا که فرض میکنیم A حد $\frac{K}{h}$ باشد

از چنین نوشتیم $\frac{K}{h}=A+\varepsilon$ (ε با h دایماً بصفر میل کند) و بعد $K=h(A+\varepsilon)$

از اینجا خوب ظاهر است که K میل میکند بصفر وقتیکه h میل بصفر باشد هر چند این شرط

ضروری لازم است لیکن کافی نیست چون وقتیکه h و K هر دو میل کنند بصفر حالت

ابهام بصورت $\frac{0}{0}$ حاصل میشود چنانکه ممکن است نسبت $\frac{K}{h}$ حد نداشته باشد

(فقره ۲۳۲ قضیهٔ ۳ تبصره)

امثله — مشتق x مساویست با ۱ زیرا که چون $y=x$ پس $K=h$

و بعد $\frac{K}{h}=1$ و از اینجا $\lim(\frac{K}{h})=1$ ($\lim$ علامت حد است)

ثانیاً مشتق $ax+b$ مساویست با a زیرا که چون $y=ax+b$ پس

$K=a(x+h)+b-ax-b=ah$ و بعد $\frac{K}{h}=a$ و از اینجا $\lim(\frac{K}{h})=a$

ثالثاً مشتق ax^2+bx+c مساویست با $2ax+b$ چون $y=ax^2+bx+c$

پس $K=h[2ax+b+ah]$ و بعد $\frac{K}{h}=2ax+b+ah$ لهذا وقتیکه h میل کند

بصفر ah نیز مایل گردد بصفر پس $\lim(\frac{K}{h})=2ax+b$

رابعاً مشتق $\sqrt{x}$ مساویست با $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشروط بر اینکه x مخالف صفر باشد

فرض میکنیم $y=\sqrt{x}$ پس $K=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ و بعد $\frac{K}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ و چون h میل کند بصفر $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ میرسد بحد $2\sqrt{x}$ و حد مخرج میشود

$2\sqrt{x}$ پس $\lim(\frac{K}{h})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ بنابراین $\frac{K}{h}$ بازاء $x=0$ نهایت

ترقی میکند وقتیکه h مایل بصفر باشد و در این حالت نمیتوان گفت که مشتق $\sqrt{x}$ با

$x=0$ نهایت بزرگ است

تبصره — مشتق معرف $y=f(x)$ را باین مرسوم مینامیم y' یا $f'(x)$ و

$f'(x)$ مشتق ax^2+bx+c $y=ax^2+bx+c$ چنین نموده میشود $y'=2ax+b$

و همین طور $(x)'=1$ و $(\sqrt{x})'=y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

تعریف — وقتیکه معرفی بازاء مقداری از x دارای مشتق باشد این مشتق

نیز از معرفیست از x که میتواند یک مشتق قبول کند و این مشتق مشتق اول مشتق اصلی

معرف مفروض خوانند و همین طور مشتق ثانی میتواند یک مشتق قبول کند که آنرا

مشتق سوم نامند و همچنین مشتق چهارم و پنجم بطور کلی مشتق مرتبه n ام معرفی

تعیین نمود و غالب اتفاق میافتد که مشتقات متوالیه متوقف نباشند یعنی هر مشتق

بموازات یک مشتق قبول کند در اینحالت معرف میتواند مشتقات جمیع مراتب را دارا

باشد و نیز ممکن است مثلاً یکی از مشتقات ثابت باشد آنوقت مشتقات بعد صفر میگردد

مشتق ثانی معرف $y=f(x)$ را چنین مینویسند y'' یا $f''(x)$ و بطور کلی مشتق

از حد مشتق قبول نکند مگر وقتیکه بازاء آن منفصل باشد زیرا که فرض میکنیم A حد $\frac{K}{h}$ باشد
از چنین فرضیم $\frac{K}{h}=A+\alpha$ (یا h را بنده بصفر و بعد $K=h(A+\alpha)$
از اینجا خوب ظاهر است که K میل میکند بصفر وقتیکه h مایل بصفر باشد هر چند این
فرض لازم است لیکن کافی نیست چون وقتیکه h و K هر دو میل کنند بصفر حالت
ابهام بصورت $\frac{0}{0}$ حاصل میشود چنانکه ممکن است نسبت $\frac{K}{h}$ حد نداشته باشد
(نمره ۲۴۲ قضیه ۳ تبصره)

امثله — مشتق x مساویست با ۱ زیرا که چون $y=x$ پس $K=h$
و بعد $\frac{K}{h}=1$ و از اینجا $\lim(\frac{K}{h})=1$ ($\lim$ علامت حد است)

ثانیاً مشتق $ax+b$ مساویست با a زیرا که چون $y=ax+b$ پس
$K=a(x+h)+b-ax-b=ah$ و بعد $\frac{K}{h}=a$ و از اینجا $\lim(\frac{K}{h})=a$

ثالثاً مشتق ax^2+bx+c مساویست با $2ax+b$ چون $y=ax^2+bx+c$
پس $K=h[2ax+b+ah]$ و بعد $\frac{K}{h}=2ax+b+ah$ لهذا وقتیکه h میل کند
بصفر ah بزائل گردد بصفر پس $\lim(\frac{K}{h})=2ax+b$

رابعاً مشتق $\sqrt{x}$ مساویست با $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشروط بر اینکه x مخالف صفر باشد
فرض میکنیم $y=\sqrt{x}$ پس $K=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ و بعد $\frac{K}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ = و چون h میل کند بصفر $\sqrt{x+h}$ بسوی $\sqrt{x}$ حد نخواهد شود
$2\sqrt{x}$ پس $\lim(\frac{K}{h})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشروط بر اینکه x مخالف صفر باشد
ترقی کند وقتیکه h مایل بصفر باشد و در این صورت نمیتوان گفت که مشتق $\sqrt{x}$ برای
$x=0$ بینهایت بزرگ است

تبصره — مشتق معرف $y=f(x)$ را باین طریق مینامیم y' یا $f'(x)$ و یا
$f'(x)$ مشتق $y=ax^2+bx+c$ چنین نموده میشود $y'=2ax+b$
و بهمین طور $(x)'=1$ و $(\sqrt{x})'=y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

تعریف — وقتیکه معرفی بازاء مقداری x دارای مشتق باشد این مشتق
نیز از معرفیست از x که میتواند یک مشتق قبول کند و این مشتق مشتق اول از مشتق
معرف مفروض خوانند و بهمین طور مشتق ثانی میتواند یک مشتق قبول کند که آنرا
مشتق سوم نامند و بهمین طور مشتق چهارم و پنجم بطور کلی مشتق nام معرفی
تعیین نمود و غالب اتفاق میافتد که مشتقات متوالیه متوقف نباشند یعنی هر مشتق
بعد یک مشتق قبول کند در اینحالت معرف میتواند مشتقات جمیع مراتب را دا
باشد و ممکن است مثلاً یکی از مشتقات ثابت باشد آنوقت مشتقات بعد صفر گردد
مشتق ثانی معرف (x) $y=f$ را چنین مینامیم y'' یا $f''(x)$ و بطور کلی مشتق

مرتبهٔ n چنین نموده میشود $y^{(n)}$ یا $f^{(n)}(x)$

امثله - اولاً مشتقات مرتبهٔ اول معرف $y=ax^3+bx^2+cx+d$ عبارتند از $y'=3ax^2+2bx+c$ و $y''=6ax+2b$ و $y'''=6a$ ثانیاً مشتق اول و دوم معرف $y=ax^2+bx+c$ عبارتند از $y'=2ax+b$ و $y''=2a$ ثالثاً مشتق اول و دوم معرف $\sqrt{x}$ عبارتند از $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ و $(\sqrt{x})''=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

۴۴۸ - قضیهٔ ۱ - مشتق هر مقدار ثابت مساویست با صفر زیرا اگر فرض کنیم y معرفی از x ثابت باشد یعنی همواره دارای یک مقدار ثابت c باشد تغییر Δy از معرف که نظیر است بیک تغییر مشخص Δx از x همواره صفر است پس $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ $(\Delta x\neq 0)$ و بعد $y'=\lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=0$

۴۴۹ - قضیهٔ ۲ - مشتق حاصل جمع چند معرف که هر کدام دارای مشتق باشد مساویست با مجموع مشتق آن معرفات

فرض میکنیم u و v و w معرفی از x باشند و u' و v' و w' مشتقاتشان باشد میخواهیم ثابت کنیم که مشتق حاصل جمع $u+v+w=y$ عبارتست از $u'+v'+w'=y'$ هرگاه یک تغییر Δx به x داده شود u و v و w نیز تغییرات Δu و Δv و Δw پیدا میکنند یعنی بازاء $x+\Delta x$ مقادیر u و v و w چنین میشود $u+\Delta u$ و $v+\Delta v$ و $w+\Delta w$ و مقدار y چنین خواهد شد $u+\Delta u+v+\Delta v+w+\Delta w$ پس تغییر y نظیر تغییر Δx عبارتست از $\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v+w+\Delta w-(u+v+w)$ یا $\Delta y=\Delta u+\Delta v+\Delta w$ پس $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}$ ولی وقتیکه Δx میل کند بصفر $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ بترتیب بحدود شان u' و v' و w' میل کنند پس از این چنین استنباط کنیم (قضیهٔ ۱ فرع ۴۳۱) که حد حاصل جمع این سه $y'=u'+v'+w'$ یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مساویست با حاصل جمع حدود آنها پس مشتق مطلوب چنین میشود

۴۵۰ - قضیهٔ ۳ مشتق حاصل ضرب چند معرف که هر یک دارای مشتق باشد مساویست با حاصل جمع حواصل ضروب حاصله از تبدیل هر یک از معرفات مفروضه بمشتقاتشان در حاصل ضرب معرفات دیگر

اولاً فرض میکنیم u و v دو معرف از x باشند و u' و v' مشتقاتشان میخواهیم ثابت کنیم که مشتق حاصل ضرب $uv=y$ عبارتست از $u'v+uv'=y'$ هرگاه یک تغییر Δx به x داده شود u و v نیز تغییرات Δu و Δv پیدا میکنند یعنی بازاء $x+\Delta x$ مقادیر u و v چنین میشود $u+\Delta u$ و $v+\Delta v$ و حاصل

ضربشان $(v+\Delta v)(u+\Delta u)$ پس نمو حاصل ضرب y بتغیر Δx چنین میشود

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u.\Delta v \quad \text{یا} \quad \Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv$$

و چون طرفین را بر Δx قسمت کنیم حاصل شود $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u.\frac{\Delta v}{\Delta x} + v.\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}$

و اینکه Δx میل کند بسمت صفر $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ بفرض میرسند بحدّشان u' و v'

و بعد حدّ $\frac{\Delta v}{\Delta x}.u$ و $\frac{\Delta u}{\Delta x}.v$ چنین میشود uv' و vu' و اما حدّ سوم $\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}$

مرکبست از دو عامل که حدّ اوّلی u' و دوّمی v' است بصفر پس حدّ یعنی حدّ صفر

و حدّ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ حاصل جمع سه جمله که هر کدام دارای حدیست مساوی شود با مجموع حدّ

آن جمل پس مشتق مطلوب چنین میشود $y' = uv' + vu'$

ثانیاً قضیّه که قضیّه در دو عامل ثابت شد در چند عامل نیز بسهولت مبرهن میشود مثلاً

فرض کنیم u و v و w سه معروف از x باشند و u' و v' و w' مشتقات آن

و بموجب حالت اوّل مشتق حاصل ضرب uv مساویست با $u'v + v'u$

و لیکن حاصل ضرب مفروض را میتوان چنین قرار داد $(uv).w = uvw = y$

و چون هر یک از این دو عامل دارای مشتق است پس بموجب قاعده فوق مشتق حاصل

ضربشان چنین میشود $y' = (uv)'w + w'(uv)$ و چون بجای $(uv)'$ مساویش را قرار

دهیم حاصل میشود $y' = u'vw + v'uw + w'uv$ پس قضیّه که در سه عامل ثابت شد

چهار عامل نیز مبرهن میشود در صورتیکه حاصل ضرب چهار عامل u و v و w و z

حاصل ضرب دو عامل (uvw) و z تصوّر کنیم و قاعده مبرهنه در دو عامل را

جاری سازیم و همچنین این قضیّه را میتوان ثابت نمود در هر چند عامل که بخواهیم اثبات نمائیم

نتیجه ۱ — مشتق حاصل ضرب هر معرّف در مقدار ثابتی مساویست با حاصل ضرب

مشتق معرّف در مقدار ثابت زیرا که چون مشتق هر مقدار ثابت صفر است بموجب

قاعده مذکوره فوق حاصل میشود $(Af(x))' = Af'(x)$

نتیجه ۲ — هرگاه معرّفی دارای مشتق باشد هر قوّه صحیح و مثبتی از این معرّف

دارای مشتق است که حاصل شود از اینکه آن قوّه را در نماینده‌اش ضرب کنیم و بعد

یکواحد از نماینده بکاهیم و حاصل را با مشتق معرّف ضرب نمائیم $(u^m)' = mu^{m-1}u'$

زیرا که چون m صحیح و مثبت است، حاصل ضرب m عوامل مساوی با u است

بنابر قضیه فوق مشتقش مساویست با حاصل جمع m حاصل ضرب دیگر از تبدیل هر عامل بمشتقش

شده با حاصل شود و چون هر دفعه که بجای هر عامل u مشتقش را قرار دهیم هر کدام از

حواصل ضروب مرکب باشد از $(m-1)$ عامل مساوی با u و یک عامل u' پس مشتق

u^m مساویست با حاصل جمع m جمل متساویه $u^{m-1}u'$ یعنی $(u^m)' = mu^{m-1}u'$

۴۵۱ — قضیّه ۴ — هرگاه دو معرّف دارای مشتق باشند خارج قسمتشان نیز

مشتق خواهد داشت مشروط بر اینکه مخرج مخالف صفر باشد و این مشتق مساویست با
کسری که در صورتش فضل حاصل ضرب مشتق صورت در مخرج بر حاصل ضرب مشتق مخرج
صورت باشد و مخرجش مجذور مخرج بعبارة اخری گوییم u و v مشتقات دو حرف
u و v باشند مشتق تابع قسمت $y=\frac{u}{v}$ چنین میشود $y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
چون x یک فزونی Δx داشته شود فزونیات u و v میشوند Δu و Δv و بازاء
مقدار $x+\Delta x$ مقدار تابع قسمت $\frac{u}{v}$ چنین میشود $\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$ پس
فزونی تابع قسمت نظیر فزونی Δx چنین خواهد بود $\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\Delta y$ و یا
$\Delta y=\frac{\Delta u.v-\Delta v.u}{v(v+\Delta v)}$ و چون بر Δx قسمت کنیم $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}.v-\frac{\Delta v}{\Delta x}.u}{v(v+\Delta v)}$ و
وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر Δu نیز مایل شود بصفر و $v+\Delta v$ میرسد بحد v
پس حد مخرج مخالف صفر مساویست با v^2 و علاوه بر این چون حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
بفرض مساویست با y' پس حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ چنین میشود $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

تبصره — بگذار $y=\sqrt[m]{u}$ را باین صورت بنویسیم $u=y^m$ و از اینجا
مشتق میگیریم $u'=y'\times my^{m-1}$ و از آنجا $y'=\frac{u'}{my^{m-1}}=\frac{u'}{m(\sqrt[m]{u})^{m-1}}$

۴۵۳ — مشتق x^m مساویست با mx^{m-1} (m عدد صحیح و مثبت یا منفی)
زیرا که بحسب نتایج قضایای ۲ و ۳ مشتق x^{m+1} مساویست با حاصل ضرب x^m
در مشتق x که واحد است مثلاً $(x^2)'=2x$ و $(x^3)'=3x^2$ و

$\left(\frac{1}{u^m}\right)'=\frac{-(u^m)'}{u^{2m}}=-\frac{mu^{m-1}.u'}{u^{2m}}=-\frac{mu'}{u^{m+1}}$
و از آنجا $(u^{-m})'=-m.u^{-m-1}\times u'$

۴۵۲ — قضیه ۵ — هرگاه حرفی دارای مشتق باشد بدرش نیز مشتق خواهد
داشت مشروط بر اینکه حرف مخالف صفر باشد و این مشتق مساویست با خارج قسمت مشتق
حرف بر ضعف جذر آن مثلاً $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u\neq 0)$ فرض میکنیم Δu
نظیر فزونی Δx باشد پس فزونی $y=\sqrt{u}$ چنین میشود $\Delta y=\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u}$ یا
$\Delta y=\frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$ و چون بر Δx قسمت کنیم حاصل میشود $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$
وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر Δu نیز مایل شود بصفر و $\sqrt{u+\Delta u}$ میرسد بحد $\sqrt{u}$
پس حد مخرج مخالف صفر مساویست با $2\sqrt{u}$ و علاوه بر این چون حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
بفرض مساویست با y' پس حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ چنین میشود $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

تبصره — بگذار $y=\sqrt[m]{u}$ را باین صورت بنویسیم $u=y^m$ و از اینجا
مشتق میگیریم $u'=y'\times my^{m-1}$ و از آنجا $y'=\frac{u'}{my^{m-1}}=\frac{u'}{m(\sqrt[m]{u})^{m-1}}$

۴۵۳ — مشتق x^m مساویست با mx^{m-1} (m عدد صحیح و مثبت یا منفی)
زیرا که بحسب نتایج قضایای ۲ و ۳ مشتق x^{m+1} مساویست با حاصل ضرب x^m
در مشتق x که واحد است مثلاً $(x^2)'=2x$ و $(x^3)'=3x^2$ و

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ و $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ حاصل

۴۵۴ - مشتق کثیر الجمله صحیح - هر کثیر الجمله صحیح مانند x عبارتست از مجموع چند جمله بصورت Ax^n و مشتق Ax^n مساویست با حاصلضرب A در مشتق x^n یعنی nAx^{n-1} و مشتق جمله ثابت صفر است لهذا مشتق کثیر الجمله مساویست با حاصل جمع مشتقات هر یک از اجزاء و از اینجا چنین نتیجه میشود که بجهت تعیین مشتق هر کثیر الجمله باید هر جمله آنرا در نماینده x ضرب کرد و بعد از نماینده x یکواحد نقصان نمود این قاعده در جمله ثابت نیز جاریست در صورتیکه نماینده x را در آنجمله صفر فرض کنیم

امثله

$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

$(ax^3+bx^2+cx+d)' = 3ax^2+2bx+c$

$(x^4-3x^2+x)' = 4x^3-6x+1$

$(x^6-5x^4+3x^2+7)' = 6x^5-20x^3+6x$

چون فرض کنیم کثیر الجمله درجه m ام مشتق اختیار کنیم، جمله یکواحد از نماینده x کاسته میشود بطوریکه کثیر الجمله مشتق درجه m ام مشتق درجه $(m-m)$ خواهد بود و مخصوصا کثیر الجمله مشتق درجه m از درجه $(m-m)$ صفر است یعنی مقداریست ثابت و مشتقات مراتب بعد صفر میشوند مثلا مشتقات مراتب کثیر الجمله $y = ax^3+bx^2+cx+d$ از اینقرار است $y' = 3ax^2+2bx+c$ و $y'' = 6ax+2b$ و $y''' = 6a$ و $y^{IV} = 0$

۴۵۵ - مشتق کسر منطق - چون هر کسر منطق عبارت از خارج قسمت دو کثیر

پس مشتق آنرا از روی دستور قضیه ۴ (نمره ۴۵۱) حساب میکنیم

امثله

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ و $\left(\frac{x}{x}\right)' = \frac{x'-x'}{x^2} = 0$

$\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)' = \frac{a(a'x+b')-a'(ax+b)}{(a'x+b')^2} = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b'x)^2}$

$\left(\frac{2x+1}{x^2+x-1}\right)' = \frac{2(x^2+x-1)-(2x+1)^2}{(x^2+x-1)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

$\left(\frac{x^2-5x+6}{2x^2+3x+7}\right)' = \frac{(2x-5)(2x^2+3x+7)-(4x+5)(x^2-5x+6)}{(2x^2+3x+7)^2} = \frac{12x^2-16x-53}{(2x^2+3x+7)^2}$

$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \frac{(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')}{(a'x^2+b'x+c')^2}$

برای تعیین مشتق کسر $y = \frac{\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}}{x^2}$ ابتدا آنرا بصورت مختصر در آوریم $y = \frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{x^2(x^2-1)}$ و یا $y = \frac{2x^2+2}{x^4-x^2}$ و بعد مشتق آنرا بگیریم $y' = \frac{-4x^3-8x^3+4x}{(x^4-x^2)^2}$ و یا $y' = \frac{4x(1-2x^2-x^4)}{x^2(x^2-1)^2}$

۴۵۶ - مشتقات کسر سیونهای اصم - مثال ۱ - مشتق $y = \sqrt{x}$ چنین میشود $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و مشتق ثانی $y'' = -\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{x})'}{x}$ و چون بجای $(\sqrt{x})'$ مقدار قرار دهیم حاصل میشود $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ و بهمین طور y''' را حساب میکنیم

$y''' = \frac{1}{4}\frac{(x\sqrt{x})'}{x^2}$ و $(x\sqrt{x})' = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$ پس $y''' = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

مثال ۲ - $y = \sqrt[4]{x}$ و یا $y = \sqrt{\sqrt{x}}$ پس $y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt[4]{x}}$ و $y' = \frac{(\sqrt{x})'}{2\sqrt{\sqrt{x}}}$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$ زیرا

مثال ۳ - $\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

مثال ۴ - $\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right]' = \frac{(\sqrt{x}-1+\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x^2-1})}{2x\sqrt{x}(x^2-1)}$

مشتقات معرفات مستدیره

۴۵۷ - اتصال معرفات مستدیره - معرفات مستدیره عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$ و $\operatorname{tg} x$ و $\operatorname{cotg} x$ و $\sec x$ و $\operatorname{cosec} x$ خطوط مثلثاتی قوس x و برای اثبات اتصال این معرفات تنها باید ثابت کرد که جیب هر قوس مایل بسمت صفر وقتیکه قوس میل کند بسمت صفر فرض میکنیم O مرکز دایرهٔ مثلثاتی بشعاع واحد شود و A مبدأ و Ox محور جیوب تمام و Oy محور جیوب عمود بر Ox و O پس جیب قوس $x = \widehat{AM}$ بنا بتعریف عبارتست از فاصله خط $\overline{OP}$ در صورتیکه P تصویر قائم نقطه M باشد بر Oy و پس از اینمقدمه فرض میکنیم x مثبت ε قبلاً معلوم باشد و از طرفین O دو طول OK و OK' را مساوی ε بر Ox جدا میکنیم و از K و K' دو خط موازی با Ox رسم مینمائیم تا نیم دایره BAB' را در H و H' قطع کنند و فرض میکنیم α مقدار مشترک دو قوس

متساوی AH و AH' باشد واضحست که اگر قوس $\widehat{AM}$ بجای مقدار کوچکتر از α باشد انتهای M خواهد افتاد بین H و H' و بعد نقطه P تصویر M بر Oy بین K و K' واقع خواهد شد و مقدار مطلق فاصله $\overline{OP}$ کوچکتر شود از ε بعبارة اخری اگر نامساوی $|x| < \alpha$ متحقق باشد نامساوی $|\sin x| < \varepsilon$ نیز متحقق خواهد بود پس معلوم شد که جیب میل میکند بصفر وقتیکه قوس x مایل بصفر باشد

اولاً - اتصال $\sin x$ - چون یک نقطه h به x داده شود فرق $\sin(x+h) - \sin x$ چنین میشود $K = 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ یا $K = \sin(x+h)$ وقتیکه h میل کند بسمت صفر $\sin\left(\frac{h}{2}\right)$ نیز مایل شود بصفر و $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ محدود و محصور باشد یعنی $-1 < \cos < +1$ پس K حاصل ضرب دو عامل نیز میل کند بصفر

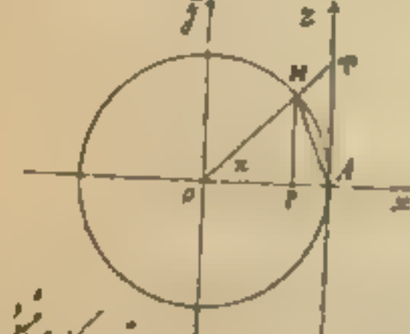
ثانیاً - اتصال $\cos x$ - فرض میکنیم h نمو x باشد و K نمو نظیرش $\cos x$ پس $K = \cos(x+h) - \cos x$ یا $K = -2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$ وقتیکه h میل کند بسمت صفر $\sin\left(\frac{h}{2}\right)$ مایل شود بصفر و $\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$ محدود باشد پس K نیز میل کند بصفر

ثالثاً - چون $\cos x$ و $\sin x$ معرفات متصل اند پس بواسطه چنین استنباط میکنیم که سایر معرفات مستدیره نیز متصلند بازاء آنقادیری از x که این معرفات دارای مقادیر

همیشه باشند زیرا که مقدارات $tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $ctg x = \frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ و $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ برحسب قضیه ۲ (فقره ۴۲۵) بازاء هیچ مقداری از x که مخارج را صفر نکنند متصل میگردند

۴۵۸ – حکم – نسبت جیب هر قوس بآن قوس میل میکند به واحد وقتیکه آن قوس مایل بصفر باشد

فرض میکنیم دایره مثلثاتی و قوس $\widehat{AM} = x$ مثبت باشد و $\overline{MP}$ جیب و $\overline{AT}$ ظل آن قوس باشد و چون مساحت دو مثلث OAM و OAP و قطاع OAM را بسنجیم



بنسبت این نامساوی حاصل میشود

$$\text{مثلث } OAM < \text{قطاع } OAM < \text{مثلث } OAP$$

یا

$$\frac{1}{2} OA \times PM < \frac{1}{2} OA \times \widehat{AM} < \frac{1}{2} OA \times AT$$

یا $MP < \widehat{AM} < AT$ بعد

$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ و چون طرفین نامساوی را بر $\sin x$ قسمت کنیم حاصل میشود

$\frac{1}{\cos x} < \frac{x}{\sin x} < 1$ این وقتیکه x میل کند بسمت صفر $\cos x$ مایل بواحد است

$\frac{x}{\sin x}$ محدود و محصور باشد مابین دو مقداری که حدش واحد است لذا حد $\frac{x}{\sin x}$ مساویست با واحد وقتیکه x بسمت صفر میل کند بصفر و اگر قوس x منفی باشد حکم فوق باز محقق است

۴۵۹ – مشتق $\sin x$ مساویست با $\cos x$ – چون به x نمو h دهیم نمو $\sin x$ چنین میشود $K = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})$ پس $\frac{K}{h} = \frac{\sin(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})}\cos(x+\frac{h}{2})$ وقتیکه h میل کند بصفر حد خارج قسمت $\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$ میشود ۱ و حد $\cos(x+\frac{h}{2})$ میشود $\cos x$ و از آنجا

$$\lim\left(\frac{K}{h}\right) = 1 \times \cos x = \cos x$$

۴۶۰ – مشتق $\cos x$ مساویست با $(-\sin x)$ – فرض میکنیم h نمو x باشد نمو نظیرش از $\cos x$ چنین میشود $K = \cos(x+h)$ و $\frac{K}{h} = \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \sin(x+\frac{h}{2})$ یا $-2\sin(\frac{h}{2})\sin(x+\frac{h}{2})$ وقتیکه h میل کند بصفر حد $\frac{K}{h}$ چنین میشود $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = 1 \times \sin x = -\sin x$

۴۶۱ – مشتق $tg x$ مساویست با $\frac{1}{\cos^2 x}$ هرگاه h نمو x باشد $tg x$ چنین میشود $K = tg(x+h) - tg x = \frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}$ پس بازاء هر مقداری از x که $\cos x$ را صفر نکند چنین خواهیم داشت $\frac{K}{h} = \frac{\sin h}{h} \times \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$ وقتیکه h میل کند بصفر حد $\frac{K}{h}$ چنین میشود

$$\lim\left(\frac{K}{h}\right) = 1 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

تبصره – وقتیکه مشتق $\cos x$ و $\sin x$ معلوم باشند میتوان مشتق $tg x$

و از روی قاعدهٔ مشتق تاریخ قسمت حساب نمود از نتیجهٔ $(\frac{\sin x}{\cos x})'$ $(\operatorname{tg} x)'$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و همین طریق میتوان مشتقات سه خط مثلثاتی دیگر را نیز حساب کرد

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \text{ و } (\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

۵ — مشتق معرف معرفات

۴۶۲ — فرض میکنیم y معرفی از متغیر u باشد $y = f(u)$ و خود u نیز معرفی از متغیر x $u = \varphi(x)$ پس میتوان $y = f(u)$ را معرفی از x تصور نمود بتوسط u و آنرا معرف معرف x نامید مثلا کسیکه $\sqrt{x^2+1}$ را میتوان معرف معرف x فرض نمود زیرا که چون قرار دهیم $u = x^2+1$ پس $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{u}$ و بهمین طور $(\sqrt{x})$ مثال معرف معرف x است

قضیه — هرگاه معرف u از x و معرف $f(u)$ از u دارای مشتقات u' و $f'(u)$ باشد مشتق معرف معرف $f(u)$ از x مساویست با حاصل ضرب $u' \cdot f'(u)$

چون معرف معرف $f(u)$ از x را y فرض کنیم $f(u) = y$ و هنگیکه متغیر x نمو Δx حاصل کند نمو u میشود Δu و نمو معرف y میشود Δy پس باید چنین نتیجه

$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$ (زیرا که بازاء $x+\Delta x$ مقدار u میشود $u+\Delta u$)

و $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$ و باین صورت نوشته میشود

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ و هنگیکه Δx میل کند بصفر $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ بحد خود میرسد بحد مشتق u و چون Δu میل کند بصفر $\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}$ نیز بطرف حد خود بحد مشتق $f(u)$ میرسد پس حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یعنی مشتق y نسبت به x مساوی با حاصل ضرب حد اول عامل $f'(u)$ یا بعبارت دیگر $y'_x = y'_u \times u'_x$ یعنی مشتق y نسبت بمتغیر x مساویست با حاصل ضرب مشتق y نسبت به u در مشتق u نسبت به x

مثال ۱ — $y = u^m$ میتوان معرف معرف فرض نمود پس $y'_x = (u^m)' = m u^{m-1} \times u'$

مثال ۲ — مشتق $y = \sin u$ چنین میشود $y' = \cos u \cdot u'$ و چون فرض کنیم $u = \sqrt{x}$ پس $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و بعد $(\sin(\sqrt{x}))' = y'_x = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال ۳ — $y = 3\sin(5x^2+3x+1)$ چون قرار دهیم $u = 5x^2+3x+1$ پس $y = 3\sin u$ و بعد $y'_u = 3\cos u \cdot u'$ و $u' = 10x+3$

پس $y' = [3\cos(5x^2+3x+1)](10x+3)$

مثال ۴ — $y = \cos 2x$ چون فرض کنیم $u = 2x$ پس $y = \cos u$ و بعد

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \times u'_x = -2\sin 2x$$

مثال ۵ - حساب کنید مشتق $y = \sin u$ را در صورتیکه $\cos u = x$ (۱) پس بنابر

چنین خواهیم داشت $y' = \cos u \; u'$ و برای محاسبه u' از روی تساوی (۱) مشتق میگیریم

$-\sin u \cdot u' = 1$ و از آنجا $u' = \frac{1}{-\sin u}$ پس $y' = -\frac{\cos u}{\sin u} = -\operatorname{cotg} u$

مثال ۶ - فرض میکنیم $y = \sin\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$ پس $y' = \cos\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$

مثال ۷ - $y = \sqrt{1-\sin^2 x}$ پس $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}(1-\sin^2 x)'$ و چون

$(1-\sin^2 x)' = -2\sin x(\sin x)' = -2\sin x \cos x$ پس $y' = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

مثال ۸ - فرض میکنیم $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ و چون $u = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ پس $y = \sqrt{u}$

و از آنجا $y' = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \times \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

۴۵۳ - دیفرانسیل هر حرف عبارتست از حاصل ضرب مشتق این حرف در نمو مقدار متغیر x مثلا دیفرانسیل حرف y از روی این تعریف مساویست با حاصل ضرب $y' \cdot \Delta x$ که در آن Δx نمو یا تغییر از x (مخالف صفر) و دیفرانسیل را با این رمز نمایش میدهند

$$dy = y' \cdot \Delta x \qquad \text{پس} \qquad dy$$

قضیه - دیفرانسیل مقدار متغیر x مساویست با نمو آن Δx زیرا که بنا بتعریف دیفرانسیل x مساویست با حاصل ضرب مشتق x که واحد است در نمو Δx پس

$$dx = 1 \times \Delta x = \Delta x$$

نتیجه - دیفرانسیل هر حرف مساویست با حاصل ضرب مشتق حرف در دیفرانسیل مقدار متغیر زیرا که بنا بتعریف $dy = y' \cdot \Delta x$ و چون $\Delta x = dx$ پس $dy = y' dx$

علاوه بر این چون $y' = \frac{dy}{dx}$ پس از اینجا طریق جدیدی برای نمایش مشتق حاصل

تبصره - فرض میکنیم y معرفی از x باشد مشتق y مساویست با $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و تقریباً Δx پس که بصفر پس چنین مینویسیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$ و Δx و ε بی صفر

و $\Delta y = y' \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$ و از اینجا ظاهر است که Δy حاصل جمع دو جمله است که

اولی $y' \Delta x$ عبارتست از دیفرانسیل dy و دومی $\varepsilon \Delta x$ که هر چه Δx بزرگ

بصفر چونکه حاصل ضرب Δx است در ε که مقداریست قریب بصفر بعبارة اخری

وقتیکه Δx خیلی کوچک باشد ε نیز خیلی کوچک میشود بنابراین Δy اختلافی با dy

ندارد جز در مقدار یکه نسبتش به dy آنقدر کوچک و ناقابل است که بجای Δy میتوان

صفر باشد و خطای ناچیزی که از اختیار کردن dy بجای مقدار تقریبی Δy ممکن است

آنقدر کوچک میشود که نمیتوانیم مشروط بر اینکه Δx را بقدر کفایت کوچک

کرده باشیم و خطای نسبی مساویست با $\frac{\varepsilon}{y'}$ پس از این تحقیقات چنین استنباط میشود

که در محاسبات عملیه مثلا در فیزیک میتوان همواره دیفرانسیل dy را نمو Δy

(۳۰)

را بجای یکدیگر استعمال نمود و از آنچه ذکر شد فرض کردیم که $f'(x)$ مخالف صفر
است در $x=a$ نیز صفر میشود و آنوقت $\Delta y = \varepsilon \Delta x$ یعنی نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
بسیار کوچک میشود و تغییر y نسبت بر x بسیار جزئی و ناقابل است

فصل بیست و سوم

استعمال مشتقات در تغییر معرفات

۴۰۴ - **تعاریف** - معرف را در فاصله معینی صعودی گوییم در صورتیکه
با تغییر در یک جهت تغییر کند بعبارة اخری معرف $f(x)$ در فاصله (a,b) صعودی است
اگر چنانچه دو عدد غیر مشخص α و β در این فاصله محصور باشند خارج قسمت
$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ مثبت باشد

معرف را در فاصله معینی نزولی گوییم در صورتیکه در خلاف جهت تغییر کند
بعبارة اخری معرف $f(x)$ در فاصله (a,b) نزولی است اگر چنانچه دو عدد
غیر مشخص α و β در آن فاصله محصور باشند خارج قسمت $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ منفی باشد

قضیه رول (Rolle) - هرگاه معرف معین و متصل $f(x)$ را بازاء جمیع مقادیر
x محصور در فاصله (a,b) دارای مشتق باشد و علاوه بر این بازاء
$x=a$ و $x=b$ مقدار متساوی اختیار کند پس اقلا یک مقدار c از مقادیر

x محصور در فاصله موردنظر یافت میشود که بازاء آن مشتق صفر شود

برهان - بفرض $f(a)=f(b)$ پس در قضیه که x از a تا b تغییر کند اگر چنانچه
معرف ثابت باشد مشتق بازاء جمیع مقادیر x صفر میشود (نتیجه ۱ و ۲ ۳۹۸)
و بعد بازاء هر مقدار c محصور مابین a و b نیز صفر خواهد شد
و اما در قضیه که x از a تا b تغییر کند معرف محدود و ثابت نباشد مختلف مقادیر نسبت
خواهد کرد و اگر $f(a)$ بزرگتر از $f(b)$ یا کوچکتر مثلا فرض کنیم بزرگتر $f(a)$ باشد و چون
معرف معین و محدود فرض شده پس مختلف مقداری خواهد رسید که بزرگتر از جمیع
مقادیر دیگر باشد یا اقل مقداری که از آن نتواند تجاوز نماید بنابراین فرض میکنیم
c عددی باشد مابین a و b بطوریکه اگر x از a تا b تغییر کند نتواند مقادیری
بزرگتر از $f(c)$ اختیار کند لهذا چنین خواهیم داشت $f(c+h)-f(c)<0$ و
$f(c-h)-f(c)<0$ h عددی است مثبت و اندک و کمتر از $c+h$ و $c-h$
محصور باشند مابین a و b پس $\frac{f(c-h)-f(c)}{h}<0$ و
$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$ و اما در قضیه که $f(x)$ میل کند بصفر و نسبت $\frac{f(c)-f(c-h)}{h}$ و
$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ هر دو متمایل شوند بنسبت حد مشترک $f'(c)$ و چون
این دو نسبت مختلف العلامه اند پس حد مشترکشان صفر است یعنی $f'(c)=0$ و نتیجه

قضیه (نوات محدوده) هرگاه معرف محدود و متصل $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر عدد محصوره مابین a و b دارای مشتق باشد میتوان یکعدد c بین a و b یافت چنانکه این تساوی متحقق شود

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

چون خارج قسمت $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ را به A بنمائیم $A(b-a)=f(b)-f(a)$ یا $A(b-a)-f(b)+f(a)=0$ (۱) و بعد ملاحظه میکنیم معرف $\varphi(x)$ ذیل را

$\varphi(x)=f(x)-Ax$ این معرف محدود و متصل است و بازاء جمیع مقادیر x محصوره مابین a و b دارای مشتق است چونکه تفاضل دو معرف از همین جنس میباشد و مشتق عبارت است از $\varphi'(x)=f'(x)-A$ ولی از تساوی (۱) چنین استنباط میشود $\varphi(b)=\varphi(a)$ پس بنا بر قضیه مزبور یکعدد c بین a و b یافت میشود چنانکه $\varphi'(c)=0$ یعنی $f'(c)-A=0$ یا $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ نمو المطلوب

قضیه ۱ (عکس قضیه نمره ۴۲۸) — هرگاه مشتق معرف $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر محصوره مابین a و b صفر باشد این معرف در فاصله (a,b) ثابت است

بجهت اثبات این قضیه کافیست که ثابت کنیم که اگر α و β دو عدد غیر مشخص محصور

مابین a و b باشند باید چنین حاصل شود $f(\beta)=f(\alpha)$

بموجب قضیه نوات محدوده میتوان یکعدد γ مابین α و β و بعد مابین a و b یافت که این تساوی متحقق باشد $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\gamma)$

ولی بنا بفرض $f'(\gamma)=0$ پس $f(\beta)-f(\alpha)=0$

قضیه ۲ — هرگاه معرف $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر عدد محصوره در فاصله (a,b) دارای مشتق باشد اولاً اگر بازاء جمیع مقادیر این فاصله مشتق مثبت باشد معرف در این فاصله صعودیست ثانیاً اگر بازاء جمیع مقادیر این فاصله مشتق منفی باشد معرف در این فاصله نزولی است

کافیست که ثابت کنیم که اگر دو عدد غیر مشخص α و β در فاصله (a,b) اختیار کنیم باید چنین حاصل شود $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$ وقتیکه مشتق مثبت باشد

چون بموجب قضیه نوات محدوده این تساوی متحقق است $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$

(γ عددیست محصور مابین α و β و بعد مابین a و b) و بفرض $f'(\gamma)$ مثبت است پس $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ نیز مثبت خواهد بود یعنی $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$.

و بهمین طور از تساوی فوق ظاهر است که اگر $f'(\gamma)$ منفی باشد چنین حاصل میشود $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<0$ و معرف نزولی است

عکس قضیه ۳ — هرگاه معرف (x) f بازاء جمیع مقادیر x محصوره در فاصله (b, a) دارای مشتق باشد اولاً اگر معرف در این فاصله صعودی باشد مشتق f' بازاء جمیع مقادیر این فاصله مثبت است یا صفر ثانیاً اگر معرف در این فاصله نزولی باشد مشتق منفی است یا صفر

فرض میکنیم x عددی باشد محصوره بین a و b و همچنین h عددی باشد بقدری کوچک که $(x+h)$ نیز محصور باشد در فاصله (b, a) پس اگر معرف در این فاصله صعودی باشد بنا بتعریف باید چنین حاصل شود $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ ولی وقتیکه h میل کند بصفر خارج قسمت $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بحد میرسد بمشتق $f'(x)$ و چون این خارج قسمت همواره مثبت است پس مشتق $f'(x)$ نیز مثبت خواهد بود یا صفر

و اگر معرف نزولی باشد مشابه همین طریق ثابت میکنیم

تبصره — باید دقت بود که در حالت مزبور مشتق باید بازاء مقادیر منفرده x صفر باشد زیرا که اگر در یک فاصله بسیار کوچکی مانند (b, a) همواره صفر شود لازم میآید که معرف در این فاصله ثابت باشد

۳۶۵ — تعاریف — اولاً معرف را بازاء $x = a$ ماکزیمم نامند هرگاه بتوان یک عدد مثبت ε یافت که مقدار معرف بازاء $x = a$ بزرگتر باشد از جمیع

مقادیر دیگری که بازاء مقادیر x محصوره بین $(a-\varepsilon)$ و $(a+\varepsilon)$ حاصل کند و مقدار معرف را بازاء $x = a$ مینیمم معرف نامند

ثانیاً معرف را بازاء $x = a$ چنیما نامند هرگاه بتوان یک عدد مثبت ε یافت که مقدار معرف بازاء $x = a$ کوچکتر شود از جمیع مقادیر دیگری که بازاء مقادیر x محصوره بین $(a-\varepsilon)$ و $(a+\varepsilon)$ اختیار کند و مقدار معرف را بازاء $x = a$ مینیموم بن معرف نامند

طبق این دو تعریف میتوان چنین ادعا نمود معرف را بازاء $x = a$ ماکزیما یا چنیما نامند وقتیکه مقدار آن بازاء $x = a$ بزرگتر یا کوچکتر باشد از جمیع مقادیر مجاور

قضیه — هرگاه معرفی بازاء $x = a$ ماکزیما یا چنیما باشد مشتق بازاء $x = a$ صفر است

وقتیکه معرف بازاء $x = a$ ماکزیما باشد پس $f(a-h)$ کوچکتر میشود از $f(a)$ وقتیکه h مثبت و کوچکتر از ε باشد پس چنین حاصل میشود

$f(a-h)-f(a) < 0$ و بعد $\frac{f(a-h)-f(a)}{-h} > 0$

و موافق همان شرایط مزبوره $(h > 0)$ برخلاف چنین حاصل میشود $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ پس وقتیکه h میل کند بصفر و خارج قسمت

$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$ و $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ بفرض حد مشترکشان میشود $f'(a)$

و چون این دو رابطه مختلفة العلامه اند پس حد مشترکشان $f'(a)$ قهراً صفر است $f'(a)=0$

و اگر معرف مینیما باشد همین وجه ثابت میکنیم

بالعکس — هرگاه مشتق را حین گذشتن از علامت (+) بعلامت (−) صفر شود

وقتیکه x بگذرد به a معرف ماکزیمم است زیرا که چون مشتق از

a تا $(a-\varepsilon)$ مثبت است پس معرف صعودی است (قضیه ۱) و چون مشتق از a

تا $(a+\varepsilon)$ منفی است پس معرف بازاء $x=a$ نزولی است (قضیه ۲) و بنابراین

هرگاه مشتق را حین گذشتن از علامت (−) بعلامت (+) صفر شود وقتیکه x بگذرد

به a معرف بازاء $x=a$ مینیمم است

تبصره — مشتق معرفی همچنانکه ذکر شد صفر میشود وقتیکه معرف ماکزیمم یا مینیمم باشد

ولیکن ممکن است اتفاق افتد که مشتق در فاصله که معرف صعودی یا نزولی باشد صفر گردد

مع ذلک معرف نه ماکزیمم باشد و نه مینیمم مثلاً چون معرف $(x-a)^3$ را ملاحظه کنیم مشتقش

میشود $3(x-a)^2$ و این مشتق همواره مثبت است مگر بازاء $x=a$ صفر میشود مع ذلک

معرف بازاء $x=a$ نه ماکزیمم است و نه مینیمم چونکه از $-\infty$ تا a و از a تا $+\infty$

صعودیست پس همواره از $-\infty$ تا $+\infty$ صعودی میشود پس تشخیص حالت ماکزیمم و مینیمم

بست که مشتق صفر شود با تغییر علامت چنانچه در مثال فوق مشتق بازاء $x=a$ صفر

شود بدون تغییر علامت چونکه بازاء هر مقداری x که مخالف a باشد همواره مثبت است

۴۶ — تعبیر هندسی مشتق — قضیه — هرگاه معرف $f(x)$ در نقطه

بازاء $x=x_0$ دارای مشتق باشد و تغییر این معرف را بمنحنی بنامیم و نقطه را بسیش

x باشد خطی بر آن منحنی مماس کنیم ضریب زاویه این خط مماس مساویست با مشتق معرف بازاء $x=x_0$

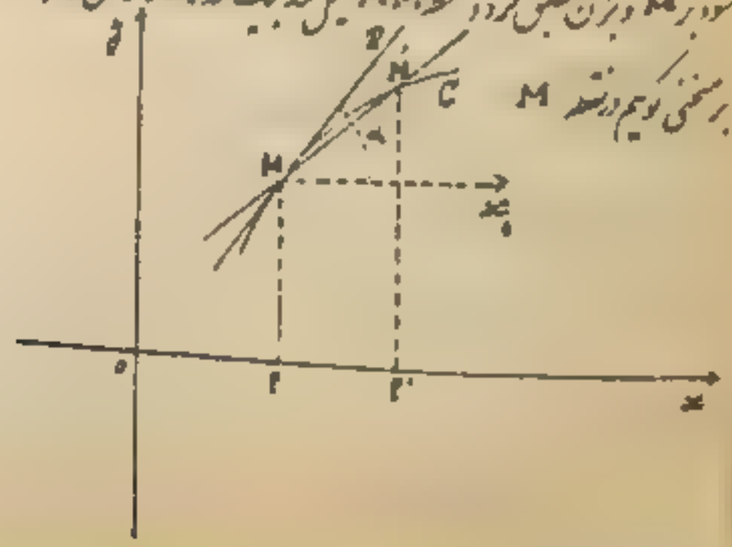
ابتدا بنحو ذیل میآوریم تعریف خط مماس را و فرض میکنیم C یک منحنی باشد و M

نقطه از این منحنی و یک نقطه دیگر M' را روی منحنی اختیار میکنیم که خیلی نزدیک M

باشد و MM' را وصل میکنیم پس وقتیکه M' در روی منحنی سیر کند و بنهایت نزدیک

شود بر M و بر آن منطبق گردد خط MM' میل کند بیک خط MT که آن را مماس

بر منحنی گوییم در نقطه M



پس از این مقدمه فرض میکنیم منحنی C نمایش تغییر معرف $y=f(x)$ باشد و نقطه M از منحنی که آبسیس x و اردونه‌اش y باشد و چون یک نقطه بر x بدهیم نقطه نظیرش از y میشود K پس فرض میکنیم M' نقطه دیگر از منحنی باشد بمختصات $x+h$ و $y+K$ و بعد MM' را وصل میکنیم و بعد مقدار ضریب زاویه آنرا معلوم کنیم و چون ضریب زاویه این خط را به a و اردونه‌اش از مبدأ را به b بنامیم معادله این خط چنین میشود $y=ax+b$ (رجوع کنید بدرجه اول) و چون دو نقطه M و M' را مقدار روی این خط پس مختصاتشان در معادله آن صدق میکند یعنی $y=ax+b$ و $y+K=a(x+h)+b$ و پس از اسقاط تساوی اول از تساوی ثانی حاصل میشود $K=ah$ یا $a=\frac{K}{h}$ پس ضریب زاویه خط MM' مساویست با $\frac{K}{h}$ ولی وقتیکه h و K میل کنند بصفر نقطه M' بنهایت نزدیک میشود به M و بفرض $\frac{K}{h}$ ضریب زاویه خط میرسد بحد نهایش y' که عبارتست از مشتق y بازاء $x=x_0$ پس از اینجا چنین معلوم میشود که وقتیکه نقطه M' بنهایت نزدیک شود به M خط MM' میرسد بحد نهایش مماس MT که ضریب زاویه این خط مماس مساویست با y' یعنی مقدار مشتق تعرف بازاء $x=x_0$

و مباحث مذکوره داشته‌ایم که ضریب زاویه خطی مساویست با خط مثلثاتی زاویه حاده

بین این خط و امتداد مثبت محور ox پس هرگاه زاویه $\widehat{MTx}$ حاده باشد محور x ها و خط مماس بر منحنی در نقطه M را فرض کنیم این مقدار برابر $tg\,\alpha$ میشود که y' = مقدار ضریب زاویه α است

نتیجه ۱ — وقتیکه تعرف ماکزیمم یا مینیمم باشد و مشتق قبول کند خط مماس بر منحنی در نقطه ماکزیمم یا مینیمم موازی میشود با ox زیرا که چون مشتق در آن نقطه صفر است پس ضریب زاویه خط مماس نیز صفر میشود و خط مماس موازی میشود با محور x ها

نتیجه ۲ — هرگاه مشتق تعرف بینهایت بزرگ باشد خط مماس بر منحنی موازی میشود با محور y ها چون وقتیکه ضریب زاویه خط مماس بینهایت بزرگ باشد این خط مورب میشود با محور y ها

قضیه مذکوره فوق بسیار مفید است و بمشتقات آن میتوان در هر نقطه از منحنی یک خط مماس رسم نمود و ترسیم منحنی بسیار صحیح و دقیق خواهد بود

۶۰۷ — طریقه تعیین تغییر معرف — بجهت تعیین تغییر معرفی ابتدا هر وقت میکنیم بیافتن قواصیکه باید x را تغییر داد تا معرف دارای مقادیر محدود و متصل باشد و بعد مشتق معرف را (اگر موجود باشد) حساب میکنیم و در فواصل فوق مقادیری از معرف بدست میآوریم که بازاء آنها مشتق صفر یا بینهایت بزرگ باشد

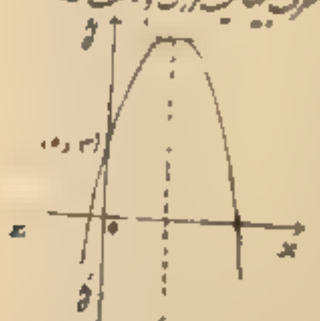
و این مقادیر مخصوصهٔ x را بترتیب صعودی مرتب کرده فواصل متوالیه تشکیل میدهیم که در هر یک از آنها علامت مشتق ثابت باشد و جهت معرف نزولی یا علامت مشتق معلوم گردد و بعد مقادیر مخصوصهٔ معرف را از قبیل ماکزیمم و مینیمم و بازاء $x=\pm\infty$ حساب میکنیم و بالاخره منحنی نمایش معرف را رسم میکنیم و برای تعیین دقت منحنی بهتر آنست که مقدار y را بازاء $x=0$ یعنی نقطه تقاطع منحنی را با محور y ها معلوم نمود و اگر ممکن شود مقادیر x را بازاء $y=0$ یعنی نقاط تلاقی منحنی را با محور xها

۴۶۸ — معرف خطی $y=ax+b$ این معرف بازاء $x=-\frac{b}{a}$ صفر میشود و مشتق $y'=a$ ثابت است پس اگر $a>0$ معرف دائما صعودیست و اگر $a<0$ معرف نزولی است و نمایش خط مستقیم است (رجوع کنید بدرجهٔ اول)

۴۶۹ — $y=ax^2+bx+c$ — مشتق این معرف عبارتست از $y'=2ax+b$ که بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ صفر میشود اولا اگر $a>0$ از نامساوی $2ax+b>0$ چنین حاصل میشود $x>-\frac{b}{2a}$ پس وقتیکه $x<-\frac{b}{2a}$ در این حالت $y'<0$ و معرف y نزولی است و وقتیکه $x>-\frac{b}{2a}$ در این حالت $y'>0$ و معرف صعودی و بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ چنین ثانیا اگر $a<0$ از نامساوی $2ax+b>0$ چنین حاصل میشود $x<-\frac{b}{2a}$ پس وقتیکه $x>-\frac{b}{2a}$ در این حالت

$y'>0$ و y صعودی است و وقتیکه $x<-\frac{b}{2a}$ در این حالت $y'<0$ و معرف نزولی و بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ ماکزیمم است (فرمول ۳۳۳)

مثال — میخواهیم تغییر معرف $y=3+4x-x^2$ را معلوم کنیم این معرف بازاء هر مقداری از x متصل و محدود است و مشتق مساویست با $y'=4-2x$ که بازاء $x=2$ تغییر علامت کند وقتی که x از $-\infty$ تا 2 ترقی کند مشتق مثبت است و معرف از $-\infty$ تا ماکزیمم y صعودی است و چون x از 2 تا $+\infty$ ترقی کند مشتق منفی و معرف از $-\infty$ تا $+\infty$ نزولی است چونکه بازاء $x=\pm\infty$ معرف نهایت بزرگ بعلامت $-x^2$ است



x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	$-\infty$

و نمایش این معرف عبارتست از قطع مکافی (فرمول ۳۳۹) که قطع میکند محور y ها را در نقطه $(x=0 , y=3)$ و محور x ها را در دو نقطه $x=2\pm\sqrt{7}$

۴۷۰ — $y=ax^4+bx^2+c$ این معرف بازاء هر مقداری از x متصل و مشتق مساویست با $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax+b)$ و اینجا دو حالت میتوان منظور داشت بحسب آنکه a و b متحد العلامه یا مختلف العلامه باشند و اگر

میگوییم مقادیر x ماتیکه a مثبت باشد (وقتیکه a منفی باشد نیز همین بحث میکنیم)

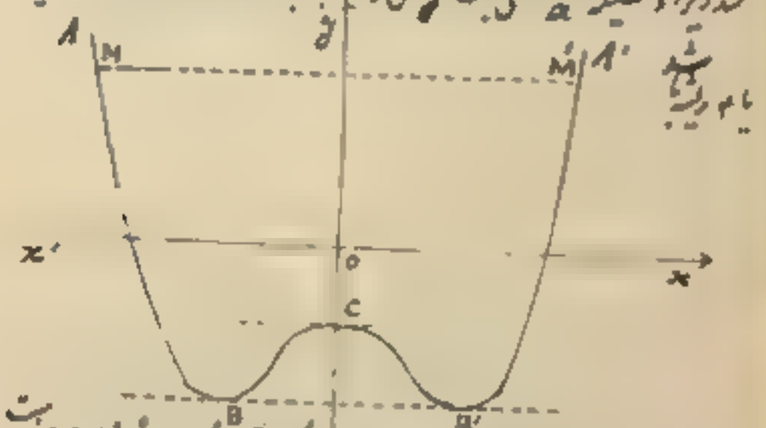
اولاً $b^2-4ac>0$ در اینحالت مشتق مقابل را از $x=0$ صفر میشود و عامل ax^2+bx+c همواره مثبت و y بازاء $x=\pm\infty$ بعلامت ax^2 یعنی مثبت خواهد بود

پس وقتیکه x از $-\infty$ تا 0 ترقی کند مشتق منفی و y از $+\infty$ تا c (مینیموم مطلق) نزول میکند و چون x از 0 تا $+\infty$ ترقی کند y جمیع مقادیر سابقه را برخلاف ترتیب فوق بخود گرفته و از c تا $+\infty$ صعود میکند و نمایش قطع مکافی است که محورش oy باشد (ناحیه شکل قطع مکافی نیست) و ممکن است این منحنی محور x ها را قطع کند یا نکند بحسب آنکه y دارای ریشه باشد یا نباشد یعنی c منفی یا مثبت باشد

ثانیاً $b^2-4ac>0$ در اینحالت مشتق بازاء دو مقدار مختلف x یعنی $x=0$ و $x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ صفر میگردد و چون x از $-\infty$ تا $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ترقی کند مشتق منفی و طرف y از $+\infty$ تا $\frac{4ac-b^2}{4a}$ (مینیموم مطلق) نزول کند و چون x از $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ تا 0 ترقی کند مشتق مثبت و y از $\frac{4ac-b^2}{4a}$ تا c (ماکزیموم نسبی) صعود کند و چون x ابتدا از 0 ترقی کند طرف بازهمان مقادیر سابقه را برخلاف ترتیب فوق مجدداً اختیار میکند (رجوع کنید بجدول ذیل)

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$		0		$+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	c	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$

منحنی این معرف مرکب باشد از دو شاخه AB و A'B' که نسبت به oy متقارن و خطوط مماس در نقاط B و c و B' موازی میشود با محور x ها و بحسب مقادیر مختلف a و b و c ممکن است منحنی محور x ها را قطع کند و یا در دو نقطه یا سه نقطه تلاقی کند زیرا وقتیکه $\frac{b}{a}$ منفی باشد y می تواند بحسب حالات مختلفه دارای ۰ یا ۲ یا ۴ ریشه باشد



۴۷۱ — کسر درجه اول $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ که در آن a' اصلاً مخالف صفر است ولی a میتواند صفر باشد این معرف بازاء $x=\frac{-b'}{a'}$ که مخرج را صفر کند بینهایت بزرگ است یعنی منفصل میشود و مشتق عبارت است از $y'=\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$ و چون مخرج همواره مثبت است پس علامت مشتق همواره ثابت خواهد بود و معرف همواره در جهت

تغییر میکند و حالا اگر $ab'-ba'$ صرف صعودی است و اگر <0 $ab'-ba'$ صرف نزولی است و نقطه صرف بازاء $x=+\infty$ مساویست به $\frac{a}{a'}$ پس دو جدول ذیل تشکیل میگردد

$ab'-ba'>0$

x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$+$	
$-\frac{b'}{a'}$		$+\infty$
		$-\infty$
	$+$	
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

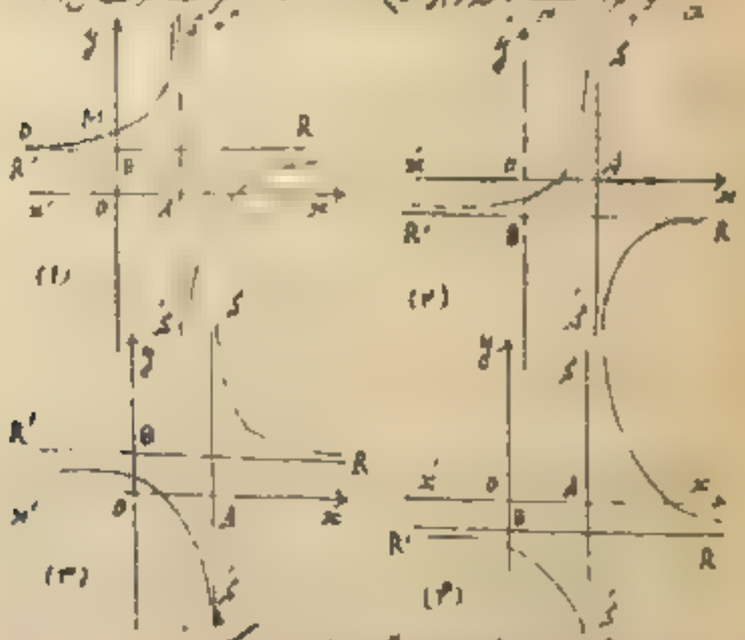
$ab'-ba'<0$

x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$-$	
$-\frac{b'}{a'}$		$-\infty$
		$+\infty$
	$-$	
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

بحسب نمایش صرف دو محور متعامد رسم میکنیم و در روی ox نقطه A را که آبسیس بحسب علامت و مقدار مساوی $-\frac{b'}{a'}$ باشد معین میکنیم و از آن نقطه خط AM را موازی oy رسم میکنیم و در روی oy نقطه B را که خطی را مماس ازلی بر شاخه از منحنی غیر محدود گوییم در صورتیکه یک نقطه M از این شاخه اختیار کنیم فاصله اش از آنخط میل کند بسمت صفر وقتیکه نقطه M در روی این شاخه بنهایت دور شود

پس از این مقدمه هرگاه x دارای یک مقدار منفی و بحسب مقدار مطلق بنهایت بزرگ باشد مقدار y بنهایت نزدیک شود به $\frac{a}{a'}$ پس قوسی MD از

منحنی تشکیل شود که خط RR' مماس ازلی آن باشد و چون x بحسب مقادیر مثبت میل کند بسمت $-\frac{b'}{a'}$ شاخه منحنی از بیار و فوق مماس ازلی گردد با نقطه M حال اگر x بحسب مقادیر بزرگتر ابتدا از $-\frac{b'}{a'}$ ترقی کند یک شاخه دیگر منحنی مماس ازلی شود و این دفعه بر همان خط نقطه M و چون x بنهایت ترقی کند این شاخه مماس ازلی شود بر خط RR' پس شکل او و نمایش تغییرات صرف است و قیمت $ab'-ba'$ و شکل ۱ مطابق حالتی است که $-\frac{b}{a}$ بزرگتر از $-\frac{b'}{a'}$ باشد و شکل ۲ و ۳ و ۴ مطابق حالتی است که $-\frac{b}{a}$ کوچکتر از $-\frac{b'}{a'}$ باشد و اگر $ab'-ba'<0$ تغییرات صرف شکل ۱ و ۲ و ۳ و ۴ میشود



و همه این منحنیات اشکال مذکوره (قطع زائد) میباشند

تبصره - هرگاه $ab'-ba'=0$ در اینصورت y همواره صفر است

و معرف همواره ثابت میگردد زیرا که از تساوی $ab' = ba'$ حاصل میشود $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

فرض میکنیم K مقدار مشترک این نسبت باشد یعنی $K = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$ پس

$a = Ka'$ ، $b = Kb'$ و بعد $y = \frac{Ka'x + Kb'}{a'x + b'} = \frac{K(a'x + b')}{a'x + b'}$

و پس از اختصار میشود $y = K$ پس معرف همواره ثابت است و در اینحالت تغییرات

بر وفق KAR و KAR نموده میشوند که معادلاتشان بترتیب عبارتند از

$x = \frac{-b'}{a'}$ و $K = \frac{a}{a'}$ و مجموع این دو خط را میتوان تمیز داد بدلالت

یکی از اشکال فوق تصور نمود که منجر شده باشد به مماسهای ازلیه شان

۴۷۲ — تغییر کسر منطق درجه دوم $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ که در آن

a و b و c و a' و b' و c' مقادیر معلوم اند و با وسیله استفاده مقدمه مخصوصی

اکتفا میکنیم بذکر تغییرات حالات عمده

مثال ۱ — معلوم کنید تغییرات معرف ذیل را $y = \frac{4x^2 - 1}{2(x^2 - x)}$

y معرف اتصالی است بازاء جمیع مقادیر x مگر بازاء $x = 0$ و $x = 1$

و مشتق چنین میشود $y' = \frac{-4x^2 + 2x - 1}{2(x^2 - x)^2}$ و چون مشتق بازاء

$x = 0$ و $x = 1$ منفصل است پس جدول تغییرات بواسطه اعداد 0 و 1

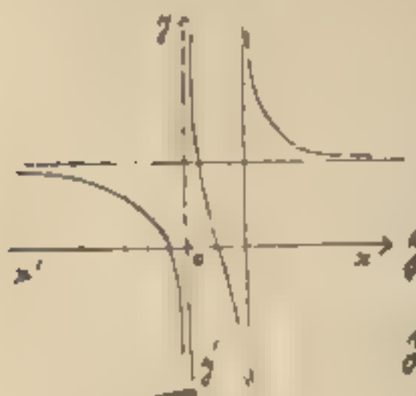
منقسم میشود بر سه جزء و از طرف دیگر مشتق در فواصل اتصالات دائماً منفی است

پس معرف دائماً نزولی است و وقتیکه x بحسب مقدار مطلق بینهایت بزرگ باشد

حد y میشود ۲ پس جدول ذیل تشکیل میگردد

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y	2	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2
y'		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	

و این تغییرات را بنحو مینمائیم



مثال ۲ — فرض میکنیم این کسر را

$y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$

معرف و مشتق $y' = \frac{2(x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$

بازاء جمیع مقادیر x متصل هستند و مشتق بازاء دو مقدار $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ صفر میشود پس بازاء جمیع مقادیر x محصوره ما بین x_1 و x_2

منفی و بازاء جمیع مقادیر واقعه در خارجه آنها مثبت میشود مقدار x_1 نظر است

به ماکزیموم $y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ و x_2 نظر بمینیموم $y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ و بازاء مقدار مطلق

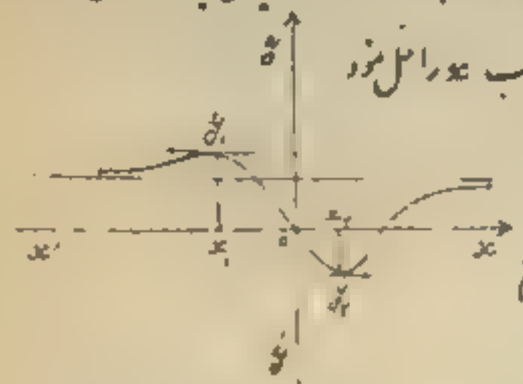
بینهایت بزرگ x حد y میشود ۱ و علاوه بر آن بازاء مقادیر ۰ و ۲ معرف y صفر میشود پس جدول ذیل تشکیل میگردد

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		2		$+\infty$
y	1	↗	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	↘	0	↘	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	↗	0	↗	1
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

منحنی نمایش این معرف دارای یک مماس ازلی است موازی با محور xها $(y=1)$

و قطع میکند این مماس را در نقطه $x=-\frac{1}{2}$ و برای یافتن این مقدار باید چنین قرار

داد و بعد معادله حاصله بحسب x را حل نمود



مثال ۳ - فرض میکنیم

این کسر را $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$

این معرف بازاء هر مقداری

x اصلی مگر بازاء $x=1$ که مخرج را صفر میکند و مشتقش چنین می شود

$y'=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$ صورت این مشتق چون ریشه ندارد پس مشتق همواره

مثبت و معرف همواره صعودی است و چون x از $-\infty$ تا 1 ترقی

کند y از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند چون وقتیکه x بحسب مقادیر کوچکتر

میل کند به 1 y بمقادیر مثبته بینهایت ترقی میکند و وقتیکه x رسید به 1 y

ناگهان از $+\infty$ جهش کند به $-\infty$ چونکه مخرج کسر تغییر علامت میکند بالاخره

چون x از 1 تا $+\infty$ ترقی کند y از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

بجهت ترسیم منحنی ابتدا ثابت میکنیم که یک مماس ازلی موجود است که معادله آن

چنین باشد $y=x-1$ صورت y را بر مخرج قسمت میکنیم و y را بصورت

ذیل مینویسیم $y=x-1-\frac{1}{x-1}$ و خط AB را میگوییم که معادله آن

چنین است $y=x-1$ و فرض میکنیم M نقطه از منحنی باشد با آبسیس x و M'

نقطه از خط که دارای همان آبسیس باشد پس قطعه خط MM' مساویست با اختلاف

نقطه خط بر اندوزه نقطه منحنی

یعنی $\overline{MM'}=\overline{PM}-\overline{PM'}$

و بنابراین $\overline{MM'}=\frac{1}{x-1}$

و چون x بینهایت ترقی کند MM'

میل میکند بصفر پس خط AB مماس ازلی است

بر منحنی و علاوه براین بواسطه علامت $\overline{MM'}$ موضع نسبی نقاط M و M' معلوم

میگردد زیرا که بازاء $x=+\infty$ قطعه خط MM' مثبت است پس M'

در فوق M و منحنی در تحت مماس ازلی واقع میگردد و بازاء $x=-\infty$ قطعه

MM' منفی است پس M' در تحت M و منحنی در فوق مماس ازلی واقع گردد

بنابراین ترسیم منحنی خیلی سهل میشود بدین طریق چون x از $-\infty$ تا -1

ترقی کند یک شاخه از منحنی احداث میگردد که از A بر خط AB مماس ازلی گشته صعود میکند و مماس ازلی میگردد بر خط دیگر CD که معادله اش این است $x=1$ و چون x زیاد به ۱ منحنی یکمرتبه مماس ازلی شود بر CD و چون x از ۱ تا $+\infty$ ترقی کند منحنی صعود میکند و مجدداً مماس ازلی شود بر AB

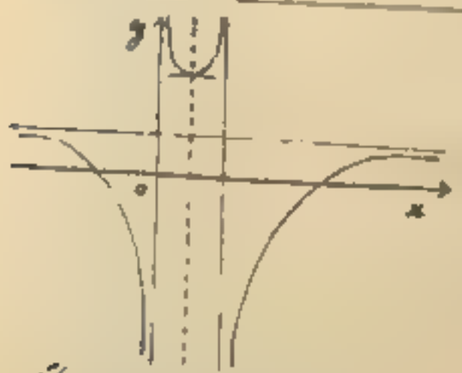
پس یک منحنی مرکب از دو شاخه تشکیل میگردد (شکل)

تبصره — کسر مذکوره فوق مثال عددیست از کسریکه بصورت کلی $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ باشد $(a\neq 0, a'\neq 0)$ و این صورت دارای یک مماس ازلی است که نسبت به محور xها مایل است و برای یافتن این مماس ازلی باید صورت کسر را بر مخرجش قسمت نموده بعد چون y را مساوی جزو صحیح خارج قسمت گیریم معادله مماس ازلی تشکیل میگردد مثلاً فرض میکنیم $\alpha x+\beta$ خارج قسمت ax^2+bx+c باشد و R باقی مانده تقسیم (که ثابت است) پس $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ $=\alpha x+\beta+\frac{R}{a'x+b'}$ و از اینجا ظاهر است که تفاضل بین ارتفاع نقطه M از منحنی و نقطه M' از خط $Y=\alpha x+\beta$ که همان آبسیس باشد مساویست با $\frac{R}{\alpha x+\beta}$ و چون x بنهایت ترقی کند این تفاضل

میل میکند به صفر پس منحنی مماس ازلی گردد بر این خط

مثال ۴ — فرض میکنیم این کسر را $y=\frac{2x^2-x-1}{6x^2-3x}$ مشتق میشود $y'=\frac{4x-1}{3(2x^2-x)^2}$ و بازاء هر مقداری از x معروف و مشتق متناهی هستند مگر بازاء $x=\frac{1}{2}$ و مشتق فقط بازاء $x=\frac{1}{4}$ صفر میشود چنانچه بازاء مقداری بزرگتر از $\frac{1}{2}$ مثبت و بازاء مقداری کوچکتر از $\frac{1}{2}$ منفی است لهذا معرف بازاء $x=\frac{1}{2}$ میرسد به ماکزیموم ۳ و علاوه بر این صورت کسر بازاء $x=-\frac{1}{3}$ و ۱ صفر میشود پس بجدول ذیل تشکیل میگردد و منحنی معرف را نیز رسم میکنیم

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y	$\frac{1}{3}$	↘	0	$-\infty$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$	$-\infty$	0	↗	$\frac{1}{3}$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	



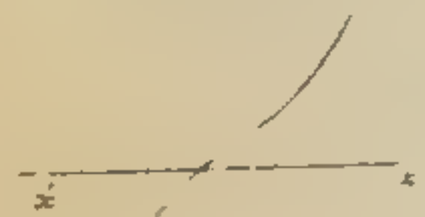
۲۷۳ — تغییرات معرف $y=x^2+px+q$ که در آن p و q مقادیر معلوم اند و مشتق میشود $y'=2x+p$ پس در حالت عمده میتوان منظور داشت بحساب اگر p مثبت باشد معرف و مشتق همواره متصالی هستند

حالت اول فرض میکنیم $p>0$ مشتق همواره مثبت و منحنی همواره صعودی است و چون x بحسب مقدار مطلق بینهایت بزرگ باشد مقدار مطلق y نیز بینهایت بزرگ و بعلامت x^3 میباشد پس جدول ذیل تشکیل میگردد

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$
y'	$+$	

و در نمایش منحنی فقط اکتفا میکنیم

بر تقسیم محور xها و از روی شکل ظاهر است



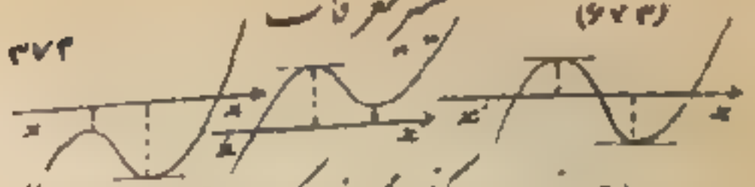
که منحنی محور xها را فقط در یک نقطه ملاقی میکند پس در اینحالت معادله

$x^3+px+q=0$ فقط دارای یک ریشه است

حالت دوم فرض میکنیم $p<0$ پس مشتق دارای دو مقدار متساوی مختلف العلامه یعنی $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ صفر میشود و جدول تغییرات ذیل تشکیل میگردد

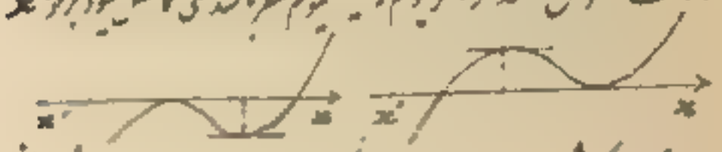
x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$	$+\infty$
y	$-\infty$	y_1		y_2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

پس معرف دارای یک ماکزیموم $y_1=q+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$ و یک مینیموم $y_2=q-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$ است و چنین ماکزیموم و مینیموم هر دو منحنی یا هر دو مثبت یا اولی مثبت و دومی منفی باشد سه منحنی تغییرات به سه شکل ذیل نموده میشود



و چون در حالت اول و دوم ماکزیموم و مینیموم بیک علامتند پس حاصل ضرب آنان $q^2+\frac{4p^3}{27}$ مثبت است و در حالت سوم حاصل ضرب آنان منفی است و در دو حالت اول منحنی فقط در یک نقطه محور xها را قطع میکند پس معادله $x^3+px+q=0$ دارای یک ریشه است و در حالت سوم چون منحنی محور xها را در سه نقطه قاطع میکند پس معادله (۳) دارای سه ریشه است

و در حالت مخصوص که مقدار ماکزیموم و مینیموم صفر باشد منحنی مماس میشود بر محور xها

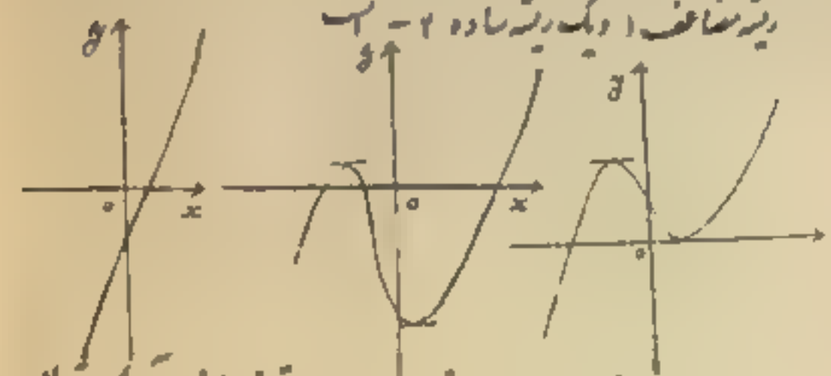


و باید دانست که شرط لازم و کافی برای اینکه معادله (۳) دارای سه ریشه متمایز باشد اینست $4p^3+27q^2<0$ (۴)

و اگر $4p^3+27q^2=0$ باز معادله دارای سه ریشه است یعنی یک ریشه مضاعف $\frac{-3q}{2p}$ و یک ریشه بسیط $\frac{3q}{p}$

مثلا سه معرف $y_1=x^3+3x-2$ و $y_2=x^3-7x-6$ و $y_3=x^3-3x+2$ به منحنیات ذیل نموده میشوند و علاوه بر این معادله $x^3+3x-4=0$ دارای یک ریشه است

و $x^3-7x-6=0$ دارای سه ریشه $x^3+3x^2+2x=0$ دارای یک ریشه مضاعف ۱ و یک ریشه ساده ۲ − است



۴۷۴ – بعضی از معرفات دارای تغییرات محدود هستند یعنی در آنها میتوان به x جمیع مقادیر ممکنه از $-\infty$ تا $+\infty$ را داد

مثال – بخواهیم تغییرات معرف $y=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ را معلوم کنیم a اصلا مثبت است و معرف محقق نگردد مگر اینکه $\frac{a+x}{a-x}>0$ یا $(a+x)(a-x)>0$ یعنی وقتیکه x محصور باشد مابین $-a$ و $+a$ پس میتوان x را فقط در این فاصله تغییر داد

مشتق معرف میشود $y'=-\frac{x^2-ax-a^2}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}$

مشتق و معرف بازاء $x=a$ منفصل میشود و مشتق بازاء $x=-a$ منفصل و بازاء دو مقدار دیگر از x صفر میگردد لیکن یکی از این دو مقدار فقط محصور است مابین $-a$ و $+a$ زیرا اگر در x^2-ax-a^2 بجای x مقدار جا

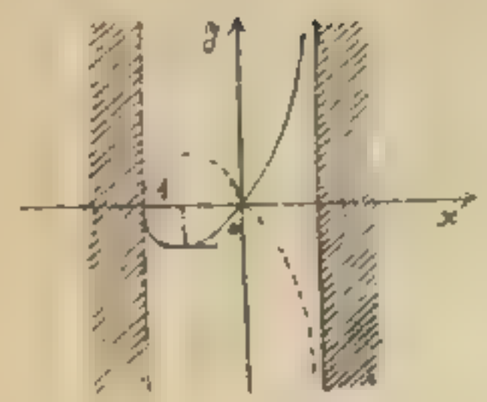
$-a$ و a قرار دهیم چنین میشود پس مقدار مشتق منفی میشود و بود $x_1=\frac{a(1-\sqrt{5})}{2}$ بعد دل ذیل تشکیل میگردد

x	$-a$		x_1		0		a
y	0	↘	y_1	↗	0	↗	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	

و مقدار مینیموم چنین میشود $y_1=\frac{a}{2}(1-\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}$

و اگر بخواهیم منحنی معرف را رسم کنیم ملاحظه میکنیم که بازاء $x=0$ و $y=1$ و بازاء $x=-a$ مقدار y الی غیرالنهایه است و خط مماس بر مبدا با جهت از منصف زاویه اول محور x و خط مماس بر A موازی است با OC پس منحنی $ABOC$ رسم میشود و اگر بخواهیم منحنی نمایش تغییرات $y=-x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ را رسم کنیم یک شاخه $ABOC'$ قرینه شاخه اول نسبت به محور x ها تشکیل میگردد و مجموع این دو شاخه منحنی موسوم به استروفوئید را ترکیب میکند

۴۷۵ – معرفات اولیه – معرف اولیه هر معرف مفروض $f(x)$ عبارتست از معرف دیگری که $f(x)$ مشتق باشد مثلا چون $2x$ مشتق x^2 است پس x^2 را معرف اولیه $2x$ گویند و میتوان بسهولت



گفته شد که هر معرف $f(x)$ می‌تواند دارای چندین معرف اولیه باشد زیرا که اگر $f(x)$ مشتق معرف $F(x)$ باشد معرف $F(x)+C$ نیز که در آن C مقداریست ثابت دارای همان مشتق خواهد بود. مثلاً $2x$ مشتق معرفات x^2 و x^2+4 و x^2-3 است پس این سه معرف عبارتند از معرفات اولیهٔ $2x$

قضیه ۱ — مشتق مساحت سطحی — هرگاه معرف منحنی $f(x)$ معلوم باشد منحنی آنرا رسم کنیم و فرض کنیم که حاصل جمع جبری سطوحی باشد محصور بین منحنی مفروض و محور ox و خطهای موازی oy و خط متغیری موازی oy که بطبیعت x باشد و هر کدام از سطوح مسبوق بعلامت + یا — باشد بحسب آنکه در فوق یا در تحت ox واقع شده باشد گوئیم که مشتق حاصل جمع مذکور که معرف x ملحوظ شود عبارت است از $f(x)$

برهان — فرض میکنیم ox و oy دو محور متعامد باشند و $ACDM$ و

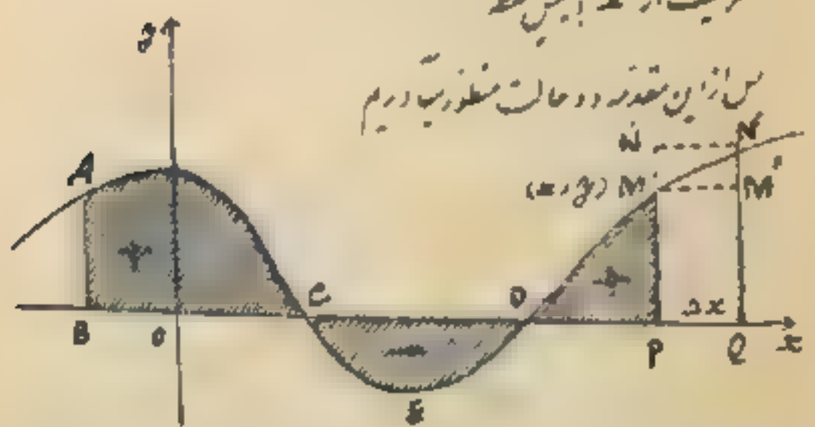
منحنی نمایش $y=f(x)$ خط ثابت AB و خط متغیر MP را که بطبیعت x باشد یعنی $OP=x$ بموازات oy رسم کنیم و چون ملاحظه کنیم حاصل جمع سطوح

$$S = \text{سطح } ABC - \text{سطح } CED + \text{سطح } DMP$$

محصور مابین منحنی و محور ox و دو خط AB و MP را بطوریکه سطوح ABC و DMP واقع در فوق ox مسبوق بعلامت + باشند و سطح CDE واقع در تحت ox مسبوق بعلامت (—) ظاهراً حاصل جمع که

معرفیست از x بطبیعت نقطه

پس از این مقدمه دو حالت منظور میداریم



اولاً فرض میکنیم y از دو نقطه M مثبت باشد و یک نمو مثبت Δx به x بدهیم پس y نیز یک نمو Δy خواهد نمود و یک نقطه دیگری از منحنی بدست میآید که مختصاتش عبارتند از $x+\Delta x$ و $y+\Delta y$ آنوقت بر حاصل جمع که سطح دو ذوزنقه

MNQP فرض میشود که باید با علامت + گرفت چونکه واقعست در فوق

ox پس چنین خواهیم داشت $\Delta S = MNQP$ و خطوط MM'

و NN' بموازات ox رسم بکنیم واضح است که سطح MNQP محصور است

بین سطوح دو مستطیل MM'QP و NN'PQ پس چنین خواهیم داشت

$$MP \times PQ < \Delta S < NQ \times PQ$$

و چون y مثبت است پس $MP = y$ و $NQ = y + \Delta y$ و

$PQ = \Delta x$ و از آنجا چنین حاصل میشود $y\Delta x < \Delta S < (y + \Delta y)\Delta x$

و چون Δx قسمت کنیم چنین میشود $y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$

و اینکه Δx میل کند بسمت صفر Δy نیز میل میکند بصفر چونکه y صرف اتصال است از

x و بعد حد $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ محصور مابین y و $y + \Delta y$ که حدش y است

y خواهد بود لهذا صرف S دارای مشتق است مساوی y یعنی

$$\frac{dS}{dx} = y = f(x)$$

تا اینجا فرض میکنیم که y از دو نقطه M متغیر باشد و باز یک نموی مثبت Δx

به x میدهیم و در اینحالت دو نقطه $M(x, y)$ و $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$

واقعند در تحت ox و حاصل جمع S نیز یک نمو ΔS اختیار میکند

که مساویست با دو نقطه MNQP با علامت (−) یعنی

$\Delta S = -MNQP$ و باز در اینجا چنین خواهیم داشت

$MM'QP < MNQP < NN'PQ$ و لیکن $MNQP = -\Delta S$

و $MM'QP = MP \times PQ = -y \cdot \Delta x$ ،

$NN'PQ = NQ \times PQ = -(y + \Delta y)\Delta x$ زیرا که

y و $y + \Delta y$ چون منفی اند پس مساوی شوند با $-MP$ و $-NQ$

و از آنجا $-y\Delta x < -\Delta S < -(y + \Delta y)\Delta x$ و پس از

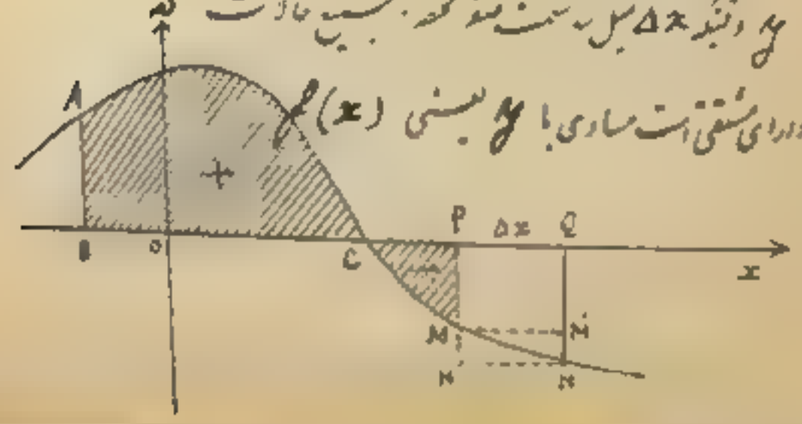
تغییر علامات چنین میشود $y\Delta x > \Delta S > (y + \Delta y)\Delta x$

و چون بر Δx قسمت کنیم میشود $y > \frac{\Delta S}{\Delta x} > y + \Delta y$

و $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ باز محصور است مابین y و $y + \Delta y$ و حدش می شود

y و اینکه Δx میل کند بسمت صفر فقط بهمین حالت

دارای مشتق است مساوی با y یعنی $f(x)$



قضیهٔ ۲ — هر معرف متصل $f(x)$ می‌تواند دارای یک عدهٔ اختیاری از معرفات اولیه باشد که اختلافشان فقط در یک عدد ثابت است

اولاً یک معرف اولیه‌ای از $f(x)$ موجود است این حکم از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود زیرا که ثابت کنی معرف $f(x)$ را رسم کنیم و ملاحظه کنیم حاصل جمع جبری عدد مستطیل محصور مابین منحنی و Δx و دو خط (یکی ثابت و دیگری متغیر) موازی با Δy را

این حاصل جمع عدد عبارت است از یک معرف اولیه از $f(x)$

ثانیاً فرض میکنیم $F(x)$ یک معرف اولیه از $f(x)$ باشد و واضح است که $F(x)+C$ بزرگ در آن C مقدار ثابت باشد عبارت است از یک معرف اولیه از $f(x)$ زیرا مشتق C صفر است و علاوه بر این از C جمیع مقادیر عدد را اختیار کند جمیع معرفات اولیه $f(x)$ حاصل میشود زیرا که فرض میکنیم $\Phi(x)$ یک معرف اولیه از $f(x)$ باشد تفاضل $\Phi(x)-F(x)$ معرفیست و مشتق این است

$$\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

پس این معرف ثابت است (نمره ۱۰۱ + قضیهٔ ۱) آنوقت چنین خواهد بود $\Phi(x)-F(x)=C$ و یا $\Phi(x)=F(x)+C$

تذکر — معرف اولیه $f(x)$ را با این رمز نمایند $\int f(x)\,dx$ چنین که نشانهٔ $\int f(x)\,dx$ چنین معلوم میشود که $F'(x)=f(x)$ باشد $dF(x)=f(x)\,dx$ مناسبین می‌نویسیم

$$x^3=\int 3x^2\,dx \quad \text{و} \quad x^2=\int 2x\,dx$$

انتگرال مبین نامیده میشود $\int f(x)\,dx$

معرف اولیه یک کثیر الحدود — اولاً معرف اولیه x^m این است $\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$ در صورتیکه m مثبت باشد و کافی است که تحقیق کنیم $\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)'=x^m$ ثانیاً معرف اولیه A این است $Ax+C$ چونکه مشتق Ax میشود A ثالثاً معرف اولیه Ax^m این است $A\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$ چونکه $\left(A\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)'=A\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)'=Ax^m$

رابعاً معرف اولیه حاصل جمع چند جمله عبارت است از حاصل جمع معرفات اولیه آن جمل زیرا که فرض میکنیم $u'=u$ و $v'=v$ و $w'=w$ پس $(u+v+w)'=u'+v'+w'=u+v+w$ یا $u'+v'+w'=u+v+w$ پس معرف اولیه $u+v+w$ عبارتست از $U+V+W$ حاصل جمع معرفات اولیه جمل

از آنچه مقدم شد چنین استنباط میشود که برای یافتن معرف اولیه یک کثیر الجمله باید در هر جمله یک واحد بر نمایندهٔ x افزود و بعد این جمله را بر نمایندهٔ جدید قسمت کرد مثلاً $\int(x^3+x^2)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$

و $\int(\frac{x^2}{2}+4)dx=\frac{x^3}{6}+4x+C$

و $\int(ax+b)dx=\frac{ax^2}{2}+bx+C$

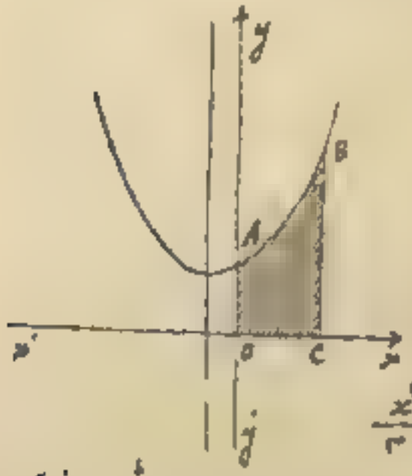
و $\int(ax^2+bx+c)dx=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$

مساحت یک سطح مستوی — فرض میکنیم $f(x)$ همواره از x باشد و یک معرف اولیهٔ $F(x)$ از آن بشناسیم حاصل جمع S سطوح محصوره مابین منحنی $y=f(x)$ و محور ox و خط AB موازی oy و خط MP که ابسیس x است موازی با oy نزدیک معرف اولیه از $f(x)$ همی باشد پس از این چنین استنباط کنیم که اختلاف S از $F(x)$ فقط در یک مقدار ثابت است یعنی $S=F(x)+C$ (۱) پس برای شناختن S کافی است که مقدار ثابت C را معلوم کنیم

واضحست که سطح S صفر میشود وقتیکه نقطه M واقع شود در A یعنی وقتیکه x مساوی شود با a ابسیس نقطه A پس اگر در تساوی (۱) بجای x مقدار a را قرار دهیم

چنین خواهیم داشت $0=F(a)+C$ و از آنجا $C=-F(a)$ و بعد $S=F(x)-F(a)$ که پس حاصل جمع S سطح محصوره مابین منحنی $y=f(x)$ و محور ox و دو خط موازی oy که ابسیسان a و b باشد مساوی است با تفاوتی از معرفات اولیه $f(x)$ وقتیکه x از a تا b ترقی کند یعنی $S=F(b)-F(a)$

مثال — حساب کنید مساحت ذوذنقه منحنیه محدود به منحنی $y=x^2+x+1$ و محور ox و محور oy و خط موازی با oy که ابسیس 1 باشد



ابتدا شکل مفروض را رسم میکنیم روش تقریب باکردیوم y که مختصاتش چنین باشد $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و یکی از معرفات اولیه y چنین است $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$

و بعد مساحت سطح S ذوذنقه منحنیه $oABC$ عبارت باشد از نمو $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$ وقتیکه x از صفر ابسیس A ترقی کند تا 1 ابسیس B.

پس چنین حاصل میشود $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1-0$ و $S=\frac{11}{6}$

امثله

۱ـ تغییرات معرفات ذیل را معلوم کنید $y=x^3(a-x)^2$

$y=(3x-1)(x-2)(3x+5)$ ، $y=x^4-2x^3+x^2-8$

$y=x^3(x-1)^2$ ، $y=x^3-3x+5$ ، $y=x^3-2x^2+x+1$

$y=\frac{2x-3}{x+1}$ ، $y=\frac{x^2-1}{4x-3}$ ، $y=\frac{4x^2-12x+5}{x^2-3x+2}$

$y=\frac{x^2-3x-1}{x-2}$ ، $y=\frac{x^2-1}{(x-2)^3}$ ، $y=\frac{3x^2-5x-6}{3x-1}$

۲ـ $y=x-\sqrt{4-x^2}$ ، $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x}$ ، $y=\sqrt{1-x^2}$

۳ـ تغییرات معرفات ذیل را معلوم کنید $y=\sin x+\cos x$

$y=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ ، $y=2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x+1$ ، $y=x+\cos x$

$y=\frac{\sin a+\cos x}{\sin 2x}$ ، $y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

$y=3\operatorname{tg} x+3\operatorname{cotg} x$ ، $y=\frac{3\sin x-4\cos x}{\cos^2 x}$

کتبه العبد المذنب الفانی مرتضی الحسینی البرغانی فی شهر جمادی الاخره سنه ۱۳۳۴

در مطبعه استاد فرخنده اختر آقا میرزا علی اصغر بمعاونت آقا میرزا حسن زنده عزیزنما بزیور طبع آراسته شد

٤٣٤

فهرست بعضی از تالیفات
میرزا رضاخان مهندس الملک

۱ هندسهٔ ابتدائی در ۲ جلد

۲ هندسهٔ متوسطه و عالی در ۲ جلد

۳ جبر و مقابله برای قسمت اول مدارس متوسطه در یک جلد

۴ جبر و مقابله برای قسمت دوم مدارس متوسطه در ۲ جلد

۵ مثلثات مستقیمة الخطوط بانضمام مثلثات کروی در یک جلد

۶ جغرافیای مقدماتی در یک جلد

۷ حل المسائل جبری در یک جلد

۸ نقشه جهانمای مسطحه

۹ نقشجات دیواری قطعات خمسه

۱۰ حساب استدلالی برای قسمت دویم مدارس متوسطه

فهرست بعضی از تالیفات
میرزا رضاخان مهندس الملک

۱ هندسهٔ ابتدائی در ۲ جلد

۲ هندسهٔ متوسطه و عالی در ۲ جلد

۳ جبر و مقابله برای قسمت اول مدارس متوسطه در یک جلد

۴ جبر و مقابله برای قسمت دوم مدارس متوسطه در ۲ جلد

۵ مثلثات مستقیمة الخطوط بانضمام مثلثات کروی در یک جلد

۶ جغرافیای مقدماتی در یک جلد

۷ حل المسائل جبری در یک جلد

۸ نقشه جهانمای مسطحه

۹ نقشجات دیواری قطعات خمسه

۱۰ حساب استدلالی برای قسمت دویم مدارس متوسطه